THESE DE DOCTORAT D'ETAT
ES SCIENCES PHYSIQUES présentée
A LA FACULTE DES SCIENCES DE PARIS VII
pour obtenir de grade de DOCTEUR ES-SCIENCES
par **Maurice BENAYOUN**

CONTRIBUTION A L' ETUDE RELATIVISTE DES COLLISIONS A PLUSIEURS VOIES

extension de la méthode des déterminants

Soutenue le 15 Novembre 1973 devant la Commission

Président
M. B. DIU
Examinateurs
M. R. VINH MAU
D. IAGOLNITZER
P. LERUSTE
Rapporteur
M. FROISSART

THESE DE DOCTORAT D'ETAT

ES SCIENCES PHYSIQUES

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES DE PARIS VII

par M. Maurice BENAYOUN

pour obtenir

le grade de DOCTEUR ES-SCIENCES

CONTRIBUTION A L'ETUDE RELATIVISTE DES COLLISIONS A PLUSIEURS VOIES (EXTENSION DE LA METHODE DES DETERMINANTS)

Soutenue le 15 Novembre 1973 devant la Commission

Composée de :

Président : M. B. DIU

Examinateurs : M. R. VINH MAU

M. FROISSART (rapporteur)

D. IAGOLNITZER

P. LERUSTE

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

R E M E R C I E M E N T S

Ce travail a pû être mené à son terme grâce aux facilités qui m'ont été offertes par le Laboratoire de Physique Atomique du Collège de France où Monsieur le Professeur Francis PERRIN m'a accueilli ; je tiens à lui en exprimer toute ma gratitude.

Pour l'intérêt qu'il a bien voulu y prendre,et par sa critique toujours patiente et judicieuse, Monsieur Marcel FROISSART, Professeur au Collège de France, a fait que cette étude a pu gagner en rigueur et en précision. Je souhaite qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Cette thèse est surtout le fruit d'échanges permanents avec Monsieur Philippe LERUSTE. Je voudrais que ceci témoigne de ma profonde amitié, née d'une activité commune mais qui a rapidement débordé ce cadre.

Je désire exprimer mes plus vifs remerciements à Messieurs les Professeurs B. DIU et R.G. NEWTON qui ont lu attentivement une première version de ce texte et dont les critiques m'ont conduit -entre autres choses- à développer l'analyse des cas de non-factorisation des résidus.

Je tiens également à remercier Monsieur le Professeur R. VINH MAU et Monsieur D. IAGOLNITZER qui ont bien voulu s'intéresser à ce travail,et ont obligeamment accepté de faire partie du jury.

Que Monsieur B. JOUVET, Directeur de Recherches au CNRS, dont les conseils m'ont été fort utiles en ce qui concerne les aspects de la théorie des champs abordés dans cette étude, et Monsieur P. KESSLER, Maître de Recherches au CNRS, qui m'a initié à la recherche en physique, soient remerciés de leur aide.

Je désire exprimer mon amitié à tous les membres du laboratoire avec qui j'ai eu de fructueux et agréables échanges sur le double plan professionnel et personnel, et plus particulièrement à Messieurs C. CHAHINE, M. CROZON, A. FAYE, J.C. HOUARD, M. KARATCHENTZEFF, J. LANCIEN, B. LEFIEVRE, A. MALAMANT, J.L. NARJOUX et R. SENE.

Je voudrais aussi exprimer mes remerciements au Secrétariat du Laboratoire, en particulier à Mesdames Germaine MASSEI et Danièle PIETE qui ont dactylographié ce texte, ainsi qu'à Messieurs JOBEZ et BONIERBALE qui ont assuré la reproduction des figures. La qualité de leur travail est d'autant plus grande que j'ai dû les astreindre à des conditions parfois acrobatiques pour l'exécuter.

Je remercie enfin l'équipe du Laboratoire de Physique Corpusculaire qui s'est occupé de l'impression de cette thèse.

o

o o

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION ..... p. I

NOTATIONS ET HYPOTHESES ..... p. 1

Notations (p. 1). Hypothèses (p. 6). Prolongements analytiques et opérateurs de prolongement analytique (p. 12).

UNITARITE PHYSIQUE ET UNITARITE ETENDUE, DOMAINE DE DEFINITION DE LA MATRICE S ..... p. 19

Relations analytiques d'unitarité physique (p. 19). L'hypothèse d'unitarité non physique (p. 21). Propriétés de la matrice S, cas de l'unitarité physique (p. 23). Unitarité étendue et unitarité étendue non physique (p. 29). Propriétés de la matrice S, cas de l'unitarité étendue (p. 31). Conclusions (p. 35).

L'UNITARITE ETENDUE ET LE FORMALISME D/D ..... p. 39

Propriétés analytiques des déterminants de S (p. 39). Le formalisme D/D (p. 42). Décomposition standard de D (p. 45). La matrice K et le formalisme B/B (p. 47). Questions d'existence et d'unicité (p. 48). Les déterminants de l'amplitude (p. 52). L'unitarité étendue et la matrice S (p. 54). Sur l'uniformité de K (p. 59). Ambiguité de la notion d'unitarité étendue (p. 61). Conclusions (p. 63).

L'UNITARITE PHYSIQUE ET LE FORMALISME DETERMINANTAL ..... p. 67

Propriétés analytiques de la matrice S (p. 67). Sur les relations déterminantales d'unitarité physique (p. 71). L'hypothèse des chemins et l'unitarité physique (p. 74). Le formalisme fonctionnel (p. 76). Le problème à deux voies (p. 78). Conclusions (p. 80).

PROPRIETES LOCALES DE LA MATRICE S ET DE LA FONCTION D ..... p. 82

Théorèmes sur la factorisation des parties principales (p. 83). Propriétés locales de factorisation (p. 89). Relations entre déterminations de D sur la région physique (p. 101). Théorème d'interaction dans l'état final (p. 103). Variations de phase de D_o sur la région physique (p. 106). Conclusions (p. 109).

SUR LES PHENOMENES D'INDETERMINATION EN THEORIE DES COLLISIONS A PLUSIEURS VOIES ..... p. 111

Les sources d'indétermination (p. 111). Formulation du problème (p. 113). La première condition d'invariance (p. 114). La seconde condition d'invariance (p. 115). Les relations de surdétermination (p. 115). L'indétermination expérimentale, théorème (p. 117). Conséquences pratiques de l'indétermination expérimentale (p. 118). Exemple de l'onde S_{11} de πN (p. 121). Conclusions (p. 123).

MODELES PHENOMENOLOGIQUES ET APPROXIMATION RATIONNELLE ..... p. 125

L'approximation rationnelle (p. 127). Lois de degré des modèles phénoménologiques (p. 129). "Zérologie" des modèles rationnels (p. 133). Sur les propriétés d'irréductibilité des modèles rationnels (p. 135). Divergences entre descriptions phénoménologiques (p. 142). Conclusions (p. 144).

SUR LA FONCTION D ET LA MATRICE K EN THEORIE DES PERTURBATIONS ..... p. 146

Les modèles sans voie croisée en théorie des champs, rappels (p. 148). Décomposition analytique des boucles de self-énergie (p. 153). Lois de degré dans les modèles sans voie croisée (p. 157). Conservation des lois de degré dans la renormalisation (p. 169). Sur la renormalisation directe de la matrice K (p. 179). Sur le critère de non élémentarité $Z_3 = 0$ (p. 188). Conclusions (p. 193).

CONCLUSIONS ..... p. 197

REFERENCES ..... p. 204

APPENDICE A : Singularités de certaines matrices méromorphes ..... p. 209

APPENDICE B : Les prolongements analytiques de S, cas de l'unitarité physique ..... p. 215

APPENDICE C : Démonstration du théorème de décomposition de S (Unitarité Physique) ..... p. 226

APPENDICE D : Les prolongements analytiques de S, cas de l'unitarité étendue ..... p. 233

APPENDICE E : Une relation déterminantale ..... p. 242

APPENDICE F : Relations déterminantales du formalisme D/D ..... p. 244

APPENDICE G : Démonstration des relations générales d'unitarité physique ..... p. 246

APPENDICE H : Factorisation de la fonction d'indétermination..... p. 250

APPENDICE I : Renormalisation de la fonction D et conservation des lois de degrés ..... p. 258

INTRODUCTION

Les récents développements des techniques expérimentales ont conduit à étudier une réalité sans cesse plus complexe : nouvelles particules, productions multiples, nouvelles structures, etc... On ne dispose actuellement pas d'une théorie satisfaisante des interactions fortes pour faire face à cet afflux de données expérimentales. Pour élaborer les hypothèses dynamiques nécessaires à cette théorie, on procède à des descriptions simplifiées de la réalité par des modèles dits phénoménologiques. Ils ne sont pas arbitrairement choisis mais construits de façon à vérifier certains principes généraux, envisagés comme les fondements de la théorie à venir : conservation de la probabilité de transition d'un état quantique à un autre, invariance sous le renversement du temps, succession causale des événements, invariance relativiste...

Ces postulats étant admis, il reste encore à leur donner une formulation constructive, mathématique. C'est ici que s'introduit le postulat fondamental qu'est "l'analyticité" :"La théorie cherchée de la matrice S s'exprime en termes de fonctions analytiques" ; on doit donc donner aux principes mentionnés plus haut une expression analytique pour qu'il en soit ainsi. De cette façon, la causalité se traduit par l'analyticité de la matrice S (dans un domaine à préciser), la conservation de la probabilité par l'unitarité de cette matrice ; on tient compte de l'invariance de Lorentz par le choix des variables dont dépend la matrice-fonction S, et de la T-invariance en supposant qu'elle est symétrique et "analytique réelle".

Le principe d'analyticité ne conduit cependant pas à des expressions parfaitement déterminées de toutes les hypothèses physiques ; l'unitarité ou la causalité, par exemple, sont sujettes à des formulations mathématiques qui ne se réduisent pas toujours les unes aux autres. Même en tenant compte de cette ambiguité, le "matériel" admis comme sûr ne peut conduire qu'à un formalisme ; l'étude de celui-ci est cependant intéressante dans la mesure où elle peut permettre de séparer, dans les théories et modèles existants, les propriétés et structures dûes aux hypothèses fondamentales, de celles qui proviennent de la dynamique supposée.

Dans de nombreux cas, les phénomènes observés expérimentalement

témoignent de l'existence de structures relativement simples. C'est notamment, dans certains processus d'interaction forte, la prédominance des voies de désintégration à deux corps ($\bar{K}N \to \Lambda\pi, \Sigma\pi$; $\pi N \to \pi N, \eta N, \ldots$) jusqu'à des énergies parfois de l'ordre de 2 GeV. Actuellement, les analyses phénoménologiques à basse énergie ont surtout pour objet le voisinage des plus bas des seuils, mais on commence déjà à étendre ces études à de plus vastes domaines. Il est donc naturel de procéder à l'étude de formalismes et modèles à n voies de deux corps.

L'analyse de ce problème n'est pas un domaine vierge, et il existe déjà des théories élaborées sur les collisions à plusieurs voies où la dynamique est introduite au moyen de potentiels. Parce que cette dernière hypothèse ne semble pas adéquate aux énergies mises en jeu par les interactions fortes, il paraît utile de s'intéresser à l'extension de ces théories aux cas où l'interaction n'est pas décrite par un potentiel. Comme, enfin, il est difficile de concevoir une hypothèse dynamique réaliste, les tentatives de ce genre consistent surtout à extraire les cadres formels qui obéissent aux principes généraux dont nous avons déjà parlé.

De telles constructions ont déjà été opérées dont la plus célèbre est le formalisme matriciel $N.D^{-1}$ de Bjorken et Warnock. L'objet du présent travail est du même ordre ; il consiste à étendre au cas relativiste le formalisme déterminantal introduit par Le Couteur et Newton en théorie du potentiel. Ainsi posé, le problème présente deux aspects complémentaires ; il faut trouver

i). les conditions qui rendent possible cette extension,

ii). les propriétés de la matrice S qu'un tel formalisme implique ou rend patentes.

Ce second point n'est pas sans intérêt, dans la mesure où on peut espérer montrer des propriétés que ND^{-1} n'aurait pas déjà mis en évidence. En effet, par leur structure même, un formalisme matriciel et un formalisme déterminantal ne rendent pas aussi aisé l'étude d'une question donnée ; telle propriété peut apparaître évidente dans l'un et pas dans l'autre, et réciproquement.

Pour mener à bien la première partie de ce programme, on doit utiliser essentiellement l'unitarité, l'invariance sous le renversement du temps et la causalité des processus physique dont il a été question plus haut.

Pour ces deux hypothèses, nous avons pu pratiquement, adopter le point de vue classique. La formulation précise de la condition d'unitarité nous a, par contre, placé devant une difficulté mentionnée à notre connaissance, nulle part dans la littérature. La raison en est peut-être que , si l'accord est général en ce qui concerne le contenu de l'unitarité physique, il existe des formulations divergentes de la notion d'unitarité étendue. Pour notre part, une fois les relations d'unitarité physique prolongées sur une surface de Riemann, nous avons dû :

i) étendre formellement ces relations à toutes les sous-matrices de la matrice S ; c'est que nous avons interprété comme condition d'unitarité étendue (au sens strict du terme).

ii). Etendre les relations d'unitarité aux déterminations non physiques de la matrice S. C'est ce que nous appellerons unitarité non physique.

Si cette seonde extension peut être reliée -dans des cas particuliers- à des notions telles que la connexité du feuillet physique ou la courte portée des forces, sa signification précise reste encore à trouver. Nous aurions pu introduire à sa place sa conséquence principale, à savoir la commutativité des chemins de prolongements analytiques. Nous y avons renoncé parce que l'unitarité non physique obéit plus clairement que la commutativité à un principe de symétrie qu'on peut formuler grossièrement ainsi : tous les feuillets jouent le même rôle(*) dans les relations analytiques.

Comme d'ailleurs ND^{-1}, le formalisme D/D décrit des ondes partielles et n'a de structure réellement simple que pour des collisions à deux corps ou quasi-corps. C'est a priori la restriction la plus importante mais, pour certains processus ($\bar{K}N$ par exemple) une telle approximation se justifie quand les modes de désintégration à trois corps -et plus- sont faibles. On pourrait tenir compte de ces derniers en introduisant des facteurs d'inélasticité, mais cela complique les prolongements analytiques de façon parfois décisive.

Pour des raisons de simplicité, les coupures dynamiques de gauche et la coupure de droite ne sont pas traitées de la même façon ; les premières

---

(*) On le rapprochera du "principe d'indépendance des seuils normaux" de Olive qui préside à l'introduction de l'unitarité étendue en théorie déductive de la matrice S, et qu'on peut formuler sommairement : "Tous les seuils normaux jouent des rôles symétriques".

apparaîtrons comme des limites des domaines de méromorphie, la dernière disparaîtra dès que la matrice S aura été prolongée sur une surface de Riemann.

Après avoir explicité de façon précise les notations et hypothèses qui nous sont nécessaires, nous étudierons les propriétés analytiques de la matrice S, successivement, sous l'unitarité physique(*) et sous l'unitarité étendue -chapitre I-. Au chapitre II, nous construirons l'extension relativiste du formalime D/D sous cette dernière formulation de l'unitarité ;on verra que cela implique l'existence d'un formalisme "dual" pour la matrice K. Le chapitre III nous montrera les différences avec le cas où on ne suppose pas l'unitarité physique(*).

Les chapitres qui suivent sont consacrés à l'étude d'applications simples du formalisme déterminantal. Des propriétés locales de la matrice S, on déduira au chapitre IV une généralisation du théorème bien connu de factorisation des résidus aux pôles simples de l'amplitude ; on montrera ainsi que ce type de propriétés peut exister aux pôles ou zéros, suivant la structure de la matrice S dans les feuillets non-physiques. On verra aussi que le théorème d'interaction dans l'état final se généralise -sous forme déterminantale- pour le cas de n voies de deux corps.

Au chapitre V on étudiera les conséquences de certaines limites expérimentales (l'impossibilité matérielle de faire des mesures dans toutes les voies). Ce phénomène que nous nommons indétermination expérimentale, a des conséquences notables sur la valeur attribuée aux paramètres physiques. On verra qu'avec une définition convenable, ceux d'entre eux relatifs aux voies mesurées (position d'une particule, constante de couplage ...) peuvent n'être pas affectés. Les autres paramètres peuvent, par contre, être multipliés par des facteurs arbitraires sans qu'un changement quelconque soit observable.

(*) Par unitarité physique ou étendue, on entendra aussi bien les relations classiques que leur extension aux déterminations non physiques de la matrice S.

Les chapitres VI et VII sont consacrés à l'étude des modèles rationnels en matrice K, qui sont les plus utilisés en phénoménologie des basses énergies. En définissant certaines grandeurs caractéristiques de ces modèles, nous montrerons leur inéquivalence, c'est-à-dire leur difficulté à décrire la même réalité. Nous verrons que les modèles en matrice K peuvent recevoir une interprétation physique simple en termes de notions de théorie des champs : interactions de Fermi et de Yukawa. De cette étude, la possibilité ressort d'engendrer de nouveaux modèles phénoménologiques ayant une interprétation physique simple. En introduisant une décomposition analytique des boucles de self-énergie, on montrera qu'il est possible d'étudier directement la matrice K en construisant sa série de perturbation.

o

o o

C H A P I T R E O

NOTATIONS ET HYPOTHESES FONDAMENTALES.

Les hypothèses restrictives déjà signalées en introduction, étant admises (approximation élastique à n voies, traitement des singularités de gauche comme coupures des domaines de méromorphie, etc...), nous allons, dans ce chapitre, préciser les hypothèses réellement opératoires. Pour traiter d'une façon générale notre problème, il nous faut aussi introduire un système cohérent de notations. Celui que nous allons développer ici nous est apparu comme le plus adéquat au traitement unifié des questions relatives à la théorie de la matrice S à n voies.

I - LES NOTATIONS.

I.1 - Les matrices.

La grandeur fondamentale servant de base à la définition d'autres grandeurs physiques (amplitude, matrice K), est la matrice S. La transition d'un état asymptotique $|\alpha, \text{in}\rangle$, à un autre $|\beta, \text{out}\rangle$ est supposée entièrement définie par l'élément de matrice S correspondant (voir p. ex. réf. (1)) :

$$S_{\alpha\beta} = \langle \alpha, \text{in} | \beta, \text{out} \rangle = \langle \alpha, \text{in} | S | \beta, \text{in} \rangle .$$

Les états asymptotiques "in" et "out" sont définis par la nature des particules et par un ensemble de nombres quantiques correspondant aux grandeurs conservées de la transition ; elles commutent avec le hamiltonien libre H_o et ce sont :

$$P , J , I , Y , \Sigma = \frac{\vec{\sigma} . \vec{p}}{|\vec{p}|} ,$$

qui symbolisent respectivement, la parité, le moment angulaire total, l'isospin, l'hypercharge et l'hélicité. Le moment cinétique orbital ℓ n'y figure en général pas, mais il peut parfois être défini de façon non ambigüe (c'est le cas pour πN).

D'une façon générale, tout opérateur R, dont :

$$R_{ij} = \langle i | R | j \rangle ,$$

décrit un aspect de la transition d'un état à deux particules (i) à un autre (j), sera représenté dans l'espace des voies par une matrice dont l'élément (i,j) est la fonction R_{ij}, définie ci-dessus.

I.2 - Seuils et ensembles de seuils.

Ici, comme dans les deux prochains chapitres, les seuils sont supposés tous distincts ; il existe alors une correspondance bi-univoque entre seuil d'une voie et voie (qui n'est pas réalisée si des seuils sont confondus).

On appelle seuil de la voie i, et on le note s_i, l'énergie -ou plutôt le carré de celle-ci- à partir de laquelle, la transition vers l'état i devient physiquement réalisable. Il y a donc un ordre "naturel" des seuils, celui des énergies croissantes, et on pourrait choisir la suite des indices i, comme l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. C'est pourtant un autre choix que nous allons effectuer[2] : Pour un processus à n voies, les indices i des seuils seront choisis et ordonnés comme les puissances successives de 2 :

$$i \in \{ 2^0 , 2^1 , \ldots , 2^{n-1} \} \qquad (1)$$

On parlera abusivement, mais sans ambiguité, du seuil (ou de la voie) i au lieu du seuil s_i.

La raison d'un tel choix tient aux conséquences des hypothèses que nous allons choisir, et qui vont nous conduire à voir les seuils comme des points de branchement algébrique du premier ordre. Les rotations autour des seuils se ramèneront à une alternative : On tourne une fois (ou un nombre impair de fois) autour d'un seuil, ou on ne tourne pas (ou on tourne un nombre pair de fois) autour d'un seuil. Une alternative admettant deux réponses, le choix d'une numérotation de type binaire s'avère bien adapté.

L'ensemble de tous les seuils défini par (1) est noté N :

$$N = \{ 2^0 , 2^1 , \ldots , 2^{n-1} \} , \qquad (2)$$

et un sous-ensemble de seuils de N sera noté par n'importe quelle autre majuscule latine :

$$M , R , A , P , \ldots \quad \in \mathcal{P}(N) .$$

Le nombre de seuils contenus dans un ensemble sera désigné par la

minuscule latine correspondante :

$m = \mathrm{Card}\,(M)$, $p = \mathrm{Card}\,(P)$ ...

L'ensemble des parties de N a été noté $\mathcal{P}(N)$. L'ensemble des voies ouvertes à une énergie donnée, contient tous les seuils d'énergie inférieure. Il existe des ensembles de seuils contenus dans $\mathcal{P}(N)$ reflétant cette situation physique : on appellera sous-ensemble physique de seuils, tout ensemble M, tel que, si un seuil appartient à M, tout seuil d'énergie inférieure appartient aussi à M. On peut exprimer cette propriété de façon rigoureuse :

$$M \in \mathcal{P}(N) \text{ et } (2^{r_1}, 2^{r_2} \in N) : 2^{r_2} \in M \text{ et } r_1 < r_2 \Rightarrow 2^{r_1} \in M \ . \quad (3)$$

On notera $\mathcal{P}_p(N)$ l'ensemble des parties physiques (vérifiant (3)) de N :

$$\mathcal{P}_p(N) \subset \mathcal{P}(N) \quad \text{et} \quad \mathrm{Card}\left(\mathcal{P}_p(N)\right) = \mathrm{Card}\,(N) = n > 1 \ ,$$

où $\subset$ désigne l'inclusion stricte, au sens de la théorie des ensembles[3].

I.3 - Notations ensemblistes et 2-somme.

Les ensembles intervenant dans le formalisme à n voies sont ordonnés ; l'ordre est total ou partiel suivant que les seuils sont ou non tous distincts.

I.3.1 - Les opérations sur les ensembles.

Nous utiliserons généralement le système classique de notations ensemblistes[3]. Le signe $\in$ désignant l'appartenance d'un élément à un ensemble et $\notin$ sa négation, le sens des conjonctions logiques $\wedge$ (i.e. "et") et $\vee$ (i.e. "ou") étant admis, on définit les opérations suivantes sur les ensembles du § I.2 :

- Union $\cup$: $\{ x \in A \cup B \} \Leftrightarrow \{ x \in A \ \vee \ x \in B \}$
- Intersection $\cap$: $\{ x \in A \cap B \} \Leftrightarrow \{ x \in A \ \wedge \ x \in B \}$
- Différence $-$: $\{ x \in A - B \} \Leftrightarrow \{ x \in A \ \wedge \ x \notin B \}$
- Somme $+$: $\{ x \in A + B \} \Leftrightarrow \{ x \in A \vee x \in B \ , \ A \cap B = \phi \}$
- Inclusion au sens large $\subseteq$: $A \subseteq B \Leftrightarrow \{ \forall x \in A \ , \ x \in B \}$
- Inclusion au sens strict $\subset$: $A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \ \wedge \ (B - A \neq \emptyset)$
- Egalité $=$: $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \ \wedge \ (B \subseteq A)$

. Différence symétrique $\div$: $\quad A \div B = A \cup B - A \cap B$,

Ø désignant l'ensemble vide.

La différence symétrique est commutative et associative :

$$A \div B = B \div A \quad , \quad A \div (B \div C) = (A \div B) \div C.$$

Enfin, la fonction caractéristique d'un ensemble M de seuils s'écrit :

$$P_M(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } 2^r \notin M \\ 1 & \text{si } 2^r \in M \end{cases}$$

I.3.2 - La 2-somme.

On définit une application σ :

$$\sigma : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathbb{N} \qquad \text{(entiers naturels)} ,$$

qui, à tout $M \in \mathcal{P}(N)$, associe le nombre :

$$\sigma(M) \equiv \mu = \sum_{r=0}^{n-1} 2^r P_M(r) \qquad (4)$$

La valeur de σ pour un ensemble donné, sera <u>toujours</u> désignée par la <u>minuscule grecque</u> qui correspond au "nom" de l'ensemble (M, P, R ...).

L'application σ vérifie trivialement les trois axiomes de la mesure d'un ensemble fini[4] :

. $A \subseteq B \Rightarrow \sigma(A) \leqslant \sigma(B)$

. $\sigma(A) = 0 \Rightarrow A = \emptyset$

. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \sigma(A \cup B) = \sigma(A) + \sigma(B)$

On notera par ν la mesure associée à N :

$$\nu = \sigma(N) = 2^n - 1 ,$$

et par zéro (o) la mesure de l'ensemble vide Ø.

On définit l'opération nommée "2-somme" et notée $\div$, sur les mesures définies par (4) :

$$A , B \in \mathcal{P}(N) \text{ et } \alpha \equiv \sigma(A) , \beta \equiv \sigma(B) : \alpha \div \beta = \sigma(A \div B) . \qquad (5)$$

La 2-somme associe, à tout couple d'ensembles, la mesure de leur différence symétrique :

$$\div : (A, B) \longrightarrow \sigma(A \div B).$$

Tout comme la différence symétrique, la 2-somme est une opération (numérique) commutative et associative. Elle est reliée au "ou" exclusif de la logique formelle et nous sera très utile pour définir une indexation pratique des surfaces de Riemann que nous introduirons.

I.4 - Déterminants physiques, déterminants quelconques.

Soit un ensemble de seuils $L \in \mathcal{P}(N)$; on lui associe la sous-matrice carré S_L (de dimension ℓ) définie par :

$$(S_L)_{ij} = S_{ij} \quad , \quad \forall \ i, j \in L.$$

Sauf mention contraire explicite, nous ne considèrerons, dans la suite, que les déterminants de sous-matrices de ce type. De tels déterminants (ou sous-déterminants) sont dits diagonaux, pour des raisons évidentes.

Les déterminants diagonaux, correspondant aux sous-ensembles physiques de seuils :

$$L \in \mathcal{P}_p(N),$$

sont connus dans la littérature sous le nom de mineurs principaux[5]. Pour mettre en évidence leur sens physique, nous les appellerons "déterminants physiques".

Nous serons amenés à montrer que les éléments de la matrice S sont des fonctions définies sur l'ensemble des couples (s, μ) :

$$S\ (s, \mu).$$

le premier argument est le carré de l'énergie complexe, le second est un indice de feuillet qui s'introduira avec le prolongement analytique de la matrice S à travers les coupures de droite. Les déterminants diagonaux de la matrice S seront notés de l'une des façons suivantes :

$$\Delta_L\ (s, \mu) \equiv \mathrm{Det}_L\ S(s, \mu) \equiv \mathrm{Det}\ S_L(s, \mu).$$

Si cela ne provoque pas d'ambiguité dans les relations, on pourra sous-entendre l'affixe s et écrire :

$$\Delta_L(\mu) \equiv \mathrm{Det}_L\ S(\mu) \equiv \mathrm{Det}\ S_L(\mu) \qquad (5)$$

II - HYPOTHESES FONDAMENTALES.

II.1 - Définition des opérateurs physiques.

Comme nous l'avons déjà signalé, l'opérateur fondamental est la matrice S d'une onde partielle dont les propriétés d'unitarité :

$$S\,S^{+} = S^{+}\,S = 1 \quad ,$$

traduisent la conservation de la probabilité de transition d'un état quantique à un autre. Nous allons définir une série d'opérateurs liés à la matrice S.

Considérons les fonctions multiformes suivantes :

$$\begin{cases} q_i = k_i = (s - s_i)^{1/2} \\ q_i = \rho_i = \left[(s - s_{ci})(s - s_i)\right]^{1/2}/s \\ q_i = \rho_i^{o} = \dfrac{(s - s_i)1/2}{s} \end{cases} \qquad (6)$$

où s_i est le seuil de la voie i et

$$s_{ci} = (M - \mu)^2 \quad ,$$

le seuil de la voie croisée correspondante. Les trois fonctions (6) sont connues comme fonctions d'espace de phase du cas non relativiste (k_i), ou relativiste pour des masses égales (ρ_i^{o}) ou inégales (ρ_i).

On note q la matrice diagonale :

$$q_{ij} = q_i\,\delta_{ij} \quad .$$

. On définit les matrices K' et T' par :

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2\,i\,T' \\ T' &= K'(1 - iK')^{-1} \\ S &= (1 + iK')(1 - iK')^{-1} \end{aligned} \qquad (7)$$

. Les matrices T et K sont données par :

$$\begin{aligned} T' &= q^{\ell + 1/2}\; T\; q^{\ell+1/2} \\ K' &= q^{\ell + 1/2}\; K\; q^{\ell+ 1/2} \end{aligned} \qquad (8)$$

Dans (8), ℓ est le moment cinétique orbital de l'onde partielle considérée. Les matrices T' et K' sont l'amplitude et la reactance habituelle ; T est l'amplitude qui, en théorie non relativiste, tend vers une limite non nulle aux seuils. K est parfois appelée reactance réduite[6].

II.2 - L'unitarité physique (UP).

La conservation de la probabilité de transition d'un état quantique à un autre se traduit par l'unitarité de la matrice S[1]. S'il existe[*] deux bases complètes d'états asymptotiques, les uns incidents (états "in"), les autres émergents (états "out"), l'élément de matrice S décrivant la transition de l'un à l'autre est, par définition :

$$S_{\alpha\beta} = \langle \alpha , \text{in} | \beta , \text{out} \rangle \quad , \tag{9}$$

où α et β sont les nombres quantiques caractérisant la transition. La probabilité de cette transition est :

$$P_{\alpha\beta} = |S_{\alpha\beta}|^2 \quad .$$

Ce qu'il est convenu d'appeler[1] "Unitarité Physique" (UP) est la propriété d'unitarité de la matrice S associée à toutes les voies ouvertes à une énergie donnée. Cette énergie -réelle- est un point de la région physique. L'expression de l'unitarité physique de S dépend donc de l'énergie considérée ; nous l'écrirons :

$$\begin{cases} S_M(s)\, S_M^+(s) = S_M^+(s)\, S_M(s) = 1 \\ \forall s \in I_\mu \quad , \quad I_\mu =]\, s_m \, , \, s_{m+1}\, [\quad , \quad M \in \mathcal{P}_P(N) \end{cases} \quad . \tag{10}$$

Dans la relation (10), s est le carré de l'énergie totale, s_j le seuil de la voie j. M est l'ensemble des voies ouvertes à l'énergie s et S_M, la matrice S qui lui est associée. I_μ est la partie de la région physique où, M étant fixé, la relation (10) est valable ; c'est également l'intervalle ouvert séparant deux seuils successifs (ou le plus haut des seuils et le

---

(*) C'est même un postulat fondamental de la théorie quantique des champs[7].

point à l'infini).

La relation (10) montre évidemment une dissymétrie dans les rôles des seuils, liée à leur position relative dans la suite des seuils.

La notion d'unitarité étendue viendra plus loin, changer cet état de choses, après que nous aurons prolongé (10) analytiquement.

II.3 - La causalité (C).

Parmi les propriétés les plus importantes dans un formalisme fonctionnel, figurent les hypothèses d'analyticité. Il est communément admis qu'elles doivent résulter d'une hypothèse de causalité. Prenant appui sur ce que le lien entre causalité et analyticité est démontrable[8] tant en théorie des champs qu'en théorie du potentiel, on définit la première par la seconde.

Wanders[9] définit ainsi une condition "souple" de causalité qui revient à dire que l'amplitude de collision vers l'avant (i.e., une combinaison linéaire des ondes partielles), admet un prolongement analytique dans une bande infiniment étroite du plan complexe de s, de part et d'autre de la région physique (coupure de droite). L'intérêt d'une telle formulation est de montrer qu'une expression acceptable de l'hypothèse de causalité, n'exclut la présence de singularités que sur la région physique (et non dans le feuillet physique). D'autres formulations existent, plus élaborées mais aussi plus contraignantes[10].

Ce que nous allons introduire comme hypothèse de causalité est un ensemble de propriétés analytiques pour les différentes ondes partielles, voisines de celles habituellement supposées.

Causalité (C).

i). La matrice S est analytique dans G_o (plan complexe de s coupé aux singularités de gauche et sur la région physique $\mathbb{R}_+$).

ii). La matrice S est continue sur tous les ouverts de $\mathbb{R}_+$ limités par deux seuils successifs (ou le plus haut des seuils et le point à l'infini), de quelque côté de $\mathbb{R}_+$ que la limite soit prise.

iii). La matrice S et ses sous-déterminants diagonaux de tous ordres n'admettent de zéros qu'isolés sur $G_o \cup \mathbb{R}_+$.

Cette formulation de la "causalité" contient le "principe d'analyticité maximale" de Chew[11], puisque les singularités admises comme telles

sont les coupures de droite(*), et les coupures dynamiques de gauche provenant de la "projection" en ondes partielles de la représentation de Mandelstam.

On aurait pu dans (C) tenir compte du résultat cité de Wanders, et ne pas rejeter la présence de pôles (ou points de branchement complexes) dans le feuillet physique ; le domaine G_o serait alors un domaine de méromorphie et non d'analyticité. Il n'y a pas là, comme nous le verrons, de contrainte théorique sérieuse.

Nous avons enfin, supposé que les zéros de S ne présentent pas de points d'accumulation. Bien que ce soit bien vérifié, par exemple, en théorie non relativiste pour les potentiels à courte portée, une telle exigence n'a pas de sens physique précis. Par contre, du point de vue mathématique, elle nous autorise à utiliser l'ensemble des théorèmes classiques relatifs aux prolongements analytiques.

II.4 - La T-invariance (T).

L'invariance sous le renversement du temps, ou T-invariance, exprime deux propriétés fondamentales : d'une part, la symétrie de la matrice S ,

$$S_{ij}(\lambda) = S_{ji}(\lambda) \quad , \forall i,j \in N \, , \forall \beta \in G_o \, , \tag{11}$$

d'autre part l'analyticité hermitienne(1)(11)

$$S^{+}(\lambda) = S(\lambda^*) = S^{*}(\lambda) . \tag{12}$$

Dans un formalisme d'ondes partielles, la parité étant déjà conservées -elle figure parmi les nombres quantiques de l'onde -, les relations (11) et (12) traduisent bien la T-invariance et pas seulement l'invariance sous PT(1).

(*) Les intervalles qui y séparent deux seuils sont désignés par :

$$I_\mu =] \lambda_{2m-1} , \lambda_{2m} [\quad , \forall M \in \mathcal{P}_f(N) ,$$

avec

$$I_\nu =] \lambda_{2n-1} , \infty [.$$

Avec ces notations, les ouvertes successifs, I_μ de la région physique sont :

$$I_1 , I_3 , I_7 \ldots . I$$

II.5 - La Connexité (Co).

Les propriétés analytiques exprimées dans (C), ou qui s'en déduisent, ne contiennent pas encore un matériel suffisant pour nous, puisque ce qui nous intéresse d'abord est le prolongement analytique de la matrice S au plus grand domaine possible du feuillet physique. Afin de lever un arbitraire dans la construction d'un tel prolongement, il nous faut pouvoir définir des prolongements analytiques directs[12] (ou naturels). Nous devons donc supposer que le domaine de définition de la matrice S est connexe par arcs ; c'est-à-dire qu'on peut y définir, entre deux points quelconques, une chaine finie d'ouverts connexes tout entière contenue dans ce domaine.

Si tel est bien le cas pour la collision ;

$$\pi\,\pi \longrightarrow \pi\,\pi \ ,$$

ce ne l'est déjà plus[13] pour des processus aussi importants que :

$$\pi\,N \longrightarrow \pi\,N \ ,$$

pour ce cas[13], le domaine d'analyticité $\mathcal{G}_0$ a la structure indiquée en fig. (1).

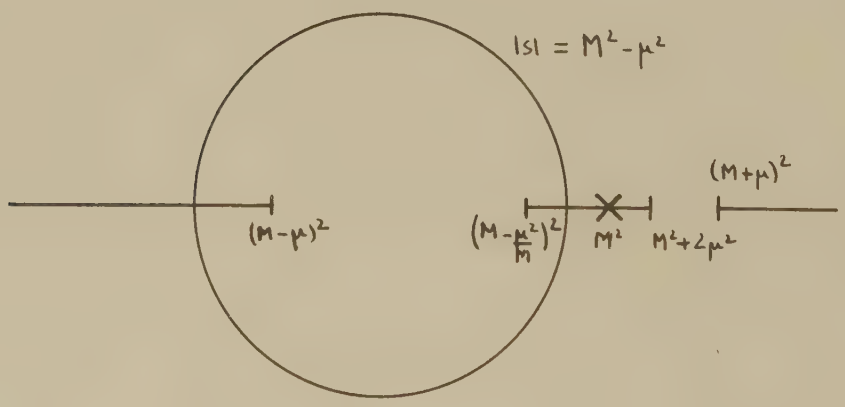


fig. (1)

Il n'est pas possible de définir un prolongement analytique direct dans le cercle, et c'est pourquoi nous groupons de telles singularités avec toutes les autres -à l'exception de la coupure d'unitarité- sous le terme de "singu-

larités de gauche" (ou dynamiques) ; elles seront traitées comme des coupures limitant le domaine d'analyticité G_o de la matrice S.

Lorsque la collision envisagée est $\pi\pi$ ou πN, nous nous trouvons, à un autre titre, encore dans un cas favorable. Il existe, en effet, un intervalle régulier sur l'axe réel du plan s, commun aux demi-plans $Im(s) > 0$ et $Im(s) < 0$, où S est analytique. L'existence d'un tel intervalle régulier n'est cependant pas automatique en interactions fortes et pour $\bar{K}N \longrightarrow \Sigma\pi$, par exemple, il n'existe pas[14]. Ainsi le plus grand domaine où on peut définir la fonction $S(\bar{K}N \to \Sigma\pi)$ n'est pas un connexe. Pour éliminer un tel inconvénient, nous admettrons que les coupures peuvent toujours être déformées de façon telle qu'on puisse toujours définir un chemin[(*)] reliant les demi-plans $Im(s) > 0$ et $Im(s) < 0$. Dans ces conditions, le plus grand domaine d'analyticité G_o de la matrice S couvre les deux demi-plans du plan complexe de la variable s.

D'où l'hypothèse de connexité :

La Connexité (Co). Le plan de s coupé à droite et aux singularités dynamiques est un domaine connexe (noté G_o).

Comme cela apparaît clairement, cette hypothèse, dans toute sa généralité, n'est pas physiquement fondée. Nous ne l'introduisons qu'afin de donner aux propriétés analytiques et topologiques que nous rencontrons, des structures commodes et symétriques. Par ce biais, la matrice-fonction S(s) étant donnée dans le domaine $Im(s) > 0$, sa valeur dans le demi-plan $Im(s) < 0$, qui se déduit par la T-invariance, coïncide avec le prolongement analytique direct de S(s) dans le même domaine. Une telle condition traduit donc un enrichissement du contenu de la T-invariance qui nous permet d'utiliser pleinement les méthodes puissantes de la théorie des fonctions analytiques.

(*) Conformément aux habitudes, les expressions suivantes seront employées avec le même sens[12] : "chaine finie d'ouverts connexes", "arc", "chemin".

III - PROLONGEMENTS ANALYTIQUES ET OPERATEURS DE PROLONGEMENT.

La première partie de notre travail consiste à étendre le domaine de méromorphie de la matrice S à une surface de Riemann. Nous devons donc préciser la nature de ce type de fonctions et la notion de prolongement analytique, que nous exprimerons par l'utilisation d'opérateurs de prolongement. Pour préciser cette dernière notion, nous étudierons deux cas simples ; l'un précisera la définition de tels opérateurs, l'autre, leur loi de composition.

III.1 - Fonction analytique complète[15], définitions.

i) Soit une suite de fonctions analytiques(*) d'une variable complexe z :

$$\{ f_i(z) \mid i = 0, 1, \ldots, n \} \quad , \tag{13}$$

les fonctions de la suite (13) sont supposées définies, respectivement, dans la suite des domaines connexes(**) :

$$\{ G_i \mid i = 0, 1, \ldots, n \} \tag{14.1}$$

homéomorphes entre eux et au plan complexe de z privé des n segments :

$$\{ g_j \mid j = 1, \ldots, n \} \tag{14.2}$$

On choisira ces segments comme étant des ouverts connexes et consécutifs tels que :

$$\forall j = 1, \ldots, n \quad : \quad g_j \cap g_{j+1} = \mathcal{Z}_{j+1}$$

(*) La notion de fonction analytique soit être entendue ici comme recouvrant aussi bien des fonctions holomorphes que méromorphes. De même, la continuité d'une fonction sera entendue au sens large -ce qui n'exclut pas les singularités isolées. Les théorèmes que nous utiliserons sont en effet, valables dans ces cas[15].

(**) On rappelle qu'un domaine A ouvert est un connexe au sens de la topologie habituelle si toute partition de A en deux ouverts disjoints vérifie :

$X \cup Y = A$, $X \cap Y = \emptyset \implies X$ ou $Y = \emptyset$.

Nous supposons enfin, réalisées les conditions de continuité :

$$\begin{cases} \forall j = 1, \dots, n \quad ; \forall z \in g_j \ , \ \varepsilon > 0 \text{ ou } \varepsilon < 0 \\ \lim_{\varepsilon \to 0} f_0(z + i\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} f_j(z - i\varepsilon) \end{cases} \tag{15}$$

ii). Tout couple $\{ f_j , G_j \}$, ou $\{ f_j , G_0 \}$ puisque les ensembles (14.1) sont homéomorphes, est appelé un élément analytique. On appelle chaine[15] (d'éléments analytiques) chacune des suites ordonnées (ici à deux éléments) :

$$\{ \{ f_0, G_0 \} , \{ f_j, G_j \} \} \ , \ j = 1, \dots, n \ . \tag{16}$$

La propriété d'une chaine est que chaque élément qui en fait partie est prolongement analytique direct de celui qui précède. L'expression "prolongement analytique direct" résume les propriétés suivantes :

1 - $\forall j = 0, 1 \dots, n$: f_j est méromorphe dans G_j.

2 - $\forall j = 0, 1, \dots, n$: G_0 et G_j ont une partie commune, éventuellement une partie g_j de leur frontière

3 - $\forall j = 0, 1, \dots, n$: $f_0(z)$ et $f_j(z)$ coïncident dans l'intersection de G_0 et G_j (donc la condition (15) de continuité est réalisée).

iii). Chaque chaine du type (16) définit une configuration analytique[15] ou une fonction analytique complète[15] $F^{(j)}(z)$ sur le domaine connexe :

$$G^{(j)} = G_0 \cup G_j \tag{16'}$$

Les fonctions f_0 et f_j sont alors les restrictions de $F^{(j)}$ respectivement, à G_0 et G_j :

$$F^{(j)} | G_0 = f_0 \quad , \quad F^{(j)} | G_j = f_j \ , \tag{17}$$

chaque élément de la chaine (16) -pour j fixé- est une détermination uniforme de $F^{(j)}$.

Pour traduire (17), utilisons la notation plus concise :

$$F(z, j) \equiv F^{(j)} | G_j = f_j(z) \ , \tag{18}$$

qui est bien définie, puisque :

$$\forall j, l \in \{1, \dots, n\} : \quad F^{(j)} \mid G_0 = F^{(l)} \mid G_0 .$$

Le domaine du plan complexe auquel tout G_j est homéomorphe est :

$$\mathbb{C} - \bigcup_{j=1}^{n} g_j \quad . \tag{19}$$

Avec la définition (18), la condition de continuité (15) s'écrit :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F(z + i\varepsilon, 0) = \lim_{\varepsilon \to 0} F(z - i\varepsilon, j), \; z \in g_j ; \; j = 1, \dots, n, \tag{15'}$$

et la chaine (16) :

$$\{ \{ F(z,0), G_0 \}, \{ F(z,j), G_j \} \},$$

ou mieux, puisque tous les domaines G_j sont homéomorphes :

$$\{ F(z,0), F(z,j) \} . \tag{16'}$$

Cette dernière suite exprime la fonction analytique complète comme la chaine de ses déterminations uniformes.

III.2 - Opérateurs de prolongement analytique.

i). Un des principaux théorèmes sur le prolongement analytique des fonctions holomorphes ou méromorphes peut être énoncé de la façon suivante :

Théorème A.

Soient deux fonctions f et g analytiques dans deux domaines $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ayant une frontière commune γ. Si f et g sont continues au sens large (ce qui autorise des singularités isolées) sur γ et si :

$$f(z) = g(z) \qquad \forall z \in \gamma ,$$

f et g sont prolongements analytiques l'une de l'autre.

En appliquant ce théorème aux fonctions (13) définies dans les domaines (14.1), la condition de continuité (15) nous assure que $f_j(z)$ et $f_0(z)$ sont prolongements analytiques l'une de l'autre à travers g_j.

ii). Nous avons supposé que les ouverts g_j ont la structure représentée ci-après :

Comme $f_0(z)$ et $f_j(z)$ sont les valeurs au point d'affixe z des deux déterminations de $F^{(j)}$, on peut dire que $f_j(z)$ est le prolongement analytique de $f_0(z)$ le long d'une chaine fermée d'ouverts connexes qui traverse g_j seulement, et on sait que[16] :

Théorème :

Si le prolongement analytique d'une fonction le long d'un chemin existe, il est unique.

On peut alors définir l'opérateur $\mathcal{L}_j$ de prolongement analytique le long d'une chaine fermée d'ouverts connexes du plan qui traverse g_j et aucun autre des ouverts g_i, par

$$\begin{cases} \mathcal{L}_j \; F(z,0) \equiv F(z,j) \\ \forall j = 1, \dots, n \qquad , \forall z \in G_0 . \end{cases} \tag{20}$$

L'application de l'opérateur $\mathcal{L}_j$ fait ainsi correspondre à la détermination principale $F(z,0)$ la détermination bien définie $F(z,j)$:

$$F(z,j) = f_j(z).$$

III.3 -Composition des opérateurs de prolongement analytique.

i). Considérons à présent la suite de fonctions analytiques[*] :

$$f_i(z), \; f_{ij}(z), \; f_{ji}(z), \; f_{ijk}(z) \dots, \quad i,j,k = 0, \dots, n, \tag{21.1}$$

chacune définie sur :

$$G_i, \; G_{ij}, \; G_{ji}, \; G_{ijk}, \dots, \quad i,j,k = 0, \dots, n. \tag{21.2}$$

Supposons ces domaines tous homéomorphes au domaine (19) et que nous ayons la relation de continuité :

$$\begin{cases} \lim_{\varepsilon \to 0} f_{jk\dots q}(z + i\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} f_{ijk\dots q}(z - i\varepsilon) \\ \forall z \in g_i \qquad , \; \varepsilon > 0 \text{ ou } \varepsilon < 0 \; , \; i = 1, \dots, n \end{cases} ; \tag{21.3}$$

chacune des suites de fonctions, i étant donné :

(*) Il n'y a pas lieu de supposer dans (21.1) que $f_{ji}(z) = f_{ij}(z)$.

$$\{ f_o , f_i , f_{ji} , f_{kji} \cdots \} , \tag{21.4}$$

dont les éléments sont définis sur les connexes :

$$G_o , G_i , G_{ji} , G_{kji} , \cdots ,$$

est une chaine d'éléments analytiques qui définit une fonction analytique F(z) sur le connexe :

$$G = G_o \cup G_i \cup G_{ji} \cup G_{kji} \cup \cdots , \tag{21.5}$$

puisque les fonctions (21.1) vérifient la condition de continuité (21.3).

On dit, par exemple, que f_{kji} est le prolongement analytique de f_o suivant la chaine (21.4). D'une façon générale, deux fonctions sont prolongements analytiques par chaine l'une de l'autre, si on peut les joindre par une chaine finie d'éléments analytiques.

Par définition de F(z) , $f_{kji\cdots}$ coïncide avec la restriction de F à $G_{kji\cdots}$:

$$F \mid G_{kji\cdots} \equiv f_{kji\cdots} \equiv F(z, k o j o i o \cdots) \quad \forall z \in G_o$$

ii). Considérons la fonction $F(z,q)$, restriction de F à G_q . En raison de (21.3), cette fonction est prolongeable à travers g_k, et le prolongement obtenu est $\mathcal{L}_k F(z,q)$ qui coïncide avec la restriction de F à G_{kq} :

$$\mathcal{L}_k F(z,q) = F(z, k o q) = f_{kq}(z) .$$

Mais, puisque :

$$F(z,q) = \mathcal{L}_q F(z,o) ,$$

nous avons :

$$F(z, k o q) = \mathcal{L}_k F(z,q) = \mathcal{L}_k \mathcal{L}_q F(z,o) . \tag{22}$$

La relation (22) définit le produit de composition des opérateurs de prolongement analytique ; cette opération n'est, a priori, pas commutative.

III.4 - Système de notations des opérateurs de prolongement analytique.

i). On convient de noter $\mathcal{L}_\mu$ l'opérateur de prolongement analytique à travers I_μ de la région physique, en venant du demi-plan $Im(\lambda) < o$. L'opérateur de prolongement analytique à travers I_μ venant de $Im(\lambda) > o$

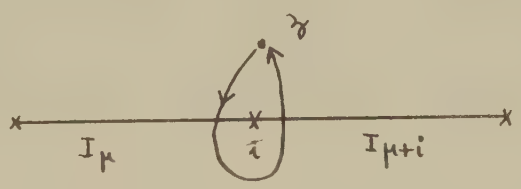
représente alors l'opérateur inverse de $\mathcal{L}_\mu$ qu'on notera par :

$$\mathcal{L}_\mu^{-1} \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{L}_{-\mu}$$

De par la définition même que nous avons donné, les opérateurs $\mathcal{L}_{\pm\mu}$ sont des opérateurs de prolongement analytique le long d'un chemin fermé du plan complexe qui ne franchit pas la coupure de gauche et qui traverse la région physique sur I_μ seulement. Ces opérateurs, puisque M est une partie physique de N, ne décrivent que des prolongements analytiques directs.

ii). Donnons nous deux ouverts successifs de la région physique I_μ et $I_{\mu+i}$

— M et $M \cup \{i\}$ sont deux parties physiques de N. Le produit $\mathcal{L}_{\mu+i}\,\mathcal{L}_{-\mu}$ est l'opérateur de prolongement analytique le long du chemin fermé figuré ci-après :



Donc $\mathcal{L}_{\mu+i}\,\mathcal{L}_\mu^{-1}$ est l'opérateur de prolongement analytique le long d'un chemin fermé du plan de s n'enserrant que le seuil s_i. Un tel opérateur sera noté $\mathcal{L}_i$:

$$\mathcal{L}_i \equiv \mathcal{L}_{\mu+i}\,\mathcal{L}_\mu^{-1} \quad ; \tag{23.1}$$

son inverse est :

$$\mathcal{L}_i^{-1} \equiv \mathcal{L}_{-i} = \mathcal{L}_\mu\,\mathcal{L}_{\mu+i}^{-1} \quad , \tag{23.2}$$

et

$$\mathcal{L}_i\,\mathcal{L}_{-i} = \mathcal{L}_{-i}\,\mathcal{L}_i = \mathbb{1}$$

où $\mathbb{1}$ est un chemin fermé tout entier contenu dans G_o, donc qui ne traverse pas les coupures de gauche et de droite.

iii). A tout R appartenant à $\mathcal{P}(N)$, on peut associer l'opérateur $\mathcal{L}_\rho$ de prolongement analytique le long d'un chemin fermé ne contenant en son intérieur que les seuils de R enserrés chacun une fois. On convient d'écrire $\mathcal{L}_\rho$ de la façon suivante :

$$\mathcal{L}_\rho = \mathcal{L}_{i_p} \ldots\ldots \mathcal{L}_{i_1} \quad , \tag{24.1}$$

si :

$$R = \{ i_1, \ldots\ldots, i_p \} \tag{24.2}$$

où la suite $1, \ldots\ldots, p$ est <u>ordonnée</u> de façon que

$$i_q > i_{q'} \qquad \text{si} \qquad q > q' \quad ;$$

on écrit ainsi $\mathcal{L}_\rho$ comme le produit de composition d'opérateurs élémentaires $\mathcal{L}_{i_q}$ chacun associé à un seuil. Ce produit est conventionnellement ordonné de droite à gauche suivant les valeurs croissantes de l'indice q. L'inverse $\mathcal{L}_\rho^{-1}$ (ou $\mathcal{L}_{-\rho}$) se définit aisément à partir de (24.1) et de :

$$\mathcal{L}_\rho \mathcal{L}_{-\rho} = \mathcal{L}_{-\rho} \mathcal{L}_\rho = \mathbb{1} .$$

Il convient de remarquer qu'en introduisant les relations (23) dans (24.1), on peut exprimer $\mathcal{L}_\rho$ comme un produit d'opérateurs de prolongement analytique direct du type $\mathcal{L}_\mu$ ou $\mathcal{L}_{-\mu}$.

Enfin, l'opérateur de prolongement le long d'un chemin fermé quelconque peut être écrit comme un produit de composition d'opérateurs $\mathcal{L}_\rho$ et $\mathcal{L}_{-\rho'}$ $(R, R' \in \mathcal{P}(N))$

Nous démontrerons, enfin, que dans le cadre de nos hypothèses, que les opérateurs associés à chaque ensemble $R \in \mathcal{P}(N)$ forment bien une seule classe.

L'ensemble des opérateurs qu'on peut définir à l'aide de (23) et (24), muni d'une loi de composition que nous préciserons, forme un groupe isomorphe au groupe d'homotopie des chemins sur une certaine surface[17].

o

o o

C H A P I T R E I

UNITARITE PHYSIQUE ET UNITARITE ETENDUE

DOMAINE DE DEFINITION DE LA MATRICE S.

-:-

Après avoir établi les relations analytiques d'unitarité physique, nous introduirons l'hypothèse d'unitarité non physique qui consiste à généraliser ces relations à toutes les déterminations de la matrice S qu'on peut construire par prolongement analytique de la détermination principale. Les conclusions essentielles de l'unitarité physique -ainsi généralisée- concernent la structure du domaine de définition de la matrice S.

En postulant l'unitarité étendue pour la détermination principale de la matrice S, comme pour ses déterminations non physiques, les conclusions établies dans le cas de l'unitarité physique se généralisent d'une façon simple et symétrique. Il est ainsi montré que les déterminants diagonaux de la matrice S sont définis sur une surface de Riemann $\mathcal{R}_n$ à 2^n feuillets, sur chacun desquels, les seuils sont des points de branchement algébrique du premier ordre. Les mesures associées aux parties de l'ensemble des voies, introduites au chapitreO, permettent une indexation commode des feuillets de $\mathcal{R}_n$. Comme la discussion des conséquences de l'extension des relations d'unitarité aux feuillets non physiques, celle des propriétés matricielles de S sous l'unitarité étendue, est reportée au chapitre II.

I - LES RELATIONS ANALYTIQUES D'UNITARITE PHYSIQUE.

Les relations d'unitarité physique :

$$S_M(\Delta) \cdot S_M^+(\Delta) = \mathbb{1} \quad , \forall \Delta \in I_\mu \quad , M \in \mathcal{P}_P(N) \quad , \tag{1}$$

ne sont pas des relations analytiques. Pour pouvoir en faire un outil maléable, il convient de commencer par en donner une forme analytique, qui coïncide avec (1) à la limite où $\Delta \in I_\mu$.

I.1 - T-invariance et Unitarité physique.

La relation (1) signifie précisément que :

$$\begin{cases} \lim_{\varepsilon \to 0} \; S_M(s+i\varepsilon) \cdot S_M^{+}(s+i\varepsilon) = \mathbb{1} \\ s \in I_\mu \;, \; M \in \mathcal{P}_p(N) \;, \; \varepsilon > 0 \end{cases} \quad ; \tag{2}$$

elle ne concerne donc pas la limite du cas $\varepsilon < 0$. Cependant, la T-invariance donne :

$$S_M^{+}(s+i\varepsilon) = S_M(s-i\varepsilon) \quad , \forall M \in \mathcal{P}_p(N) \quad , \tag{3}$$

que ε soit positif ou négatif. En portant (3) et la relation qu'on en tire par conjugaison complexe, dans (2) on obtient :

$$\begin{cases} \lim_{\varepsilon \to 0} \; S_M(s-i\varepsilon) \cdot S_M^{+}(s-i\varepsilon) = \mathbb{1} \\ s \in I_\mu \;, \; M \in \mathcal{P}_p(N) \;, \; \varepsilon > 0 \end{cases} \quad . \tag{2'}$$

Les relations (2) et (2') montrent donc que l'unitarité physique a un sens quel que soit le signe de ε , donc des deux côtés de I_μ.

I.2 - Prolongement analytique de S_M à travers I_μ.

Considérons la matrice fonction méromorphe $S_M^{-1}(s)$. Comme les zéros de $S_M(s)$ sont isolés dans G_o, les pôles de $S_M^{-1}(s)$ le sont aussi, et G_o est un domaine de méromorphie pour cette dernière fonction. Puisque S_M est continue sur la région physique, on peut écrire la relation d'unitarité :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} S_M(s+i\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} S_M^{+-1}(s+i\varepsilon) \quad , \quad s \in I_\mu \quad . \tag{4}$$

Mais, la T-invariance conduit à :

$$S_M^{+}(s^*) = S_M^{*}(s^*) = S_M(s) \quad , \forall s \in G_o \quad , \tag{5}$$

qui donne avec la relation (4) :

$$\begin{cases} \lim_{\varepsilon \to 0} \; S_M(s+i\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \; S_M^{-1}(s-i\varepsilon) \quad , \\ s \in \bar{I}_\mu \quad , \; \varepsilon > 0 \text{ ou } \varepsilon < 0 \quad , \; M \in \mathcal{P}_p(N) \end{cases} \tag{6}$$

Cette relation de continuité entre deux fonctions analytiques dans G_o et continues sur I_μ, montre (théorème A, ch. O) que $S_M^{-1}(s)$ est le prolongement analytique à travers I_μ de $S_M(s)$. Avec la terminologie

introduite au paragraphe III du chapitre 0, le prolongement de S_M à travers I_μ, venant du demi plan $Im(s)<0$ est :

$$\lambda_\mu S_M = S_M^{-1} \quad , \forall s \in G_0 \quad . \tag{7}$$

Cette relation montre évidemment que la matrice S est une fonction multiforme de s (ou bien qu'elle est constante). Comme S_M^{-1} est aussi le prolongement analytique de S_M à travers I_μ, venant du demi-plan $Im(s)>0$, nous avons :

$$\lambda_\mu^{-1} S_M = \lambda_\mu S_M = S_M^{-1} \quad , \forall s \in G_0 \tag{8}$$

I.3 - Les relations analytiques d'unitarité physique.

La relation (7) ci-dessus est une relation entre fonctions analytiques qui coïncide avec l'unitarité physique (6) sur I_μ ; elle en est donc le prolongement analytique et on l'écrira :

$$S_M \cdot \lambda_\mu S_M = 1 \qquad \forall s \in G_0, \forall M \in \mathcal{P}_p(N). \tag{9}$$

La relation (9) sera nommée "relation analytique d'unitarité physique". On peut également lui adjoindre :

$$S_M \cdot \lambda_\mu^{-1} S_M = 1 \quad , \forall s \in G_0 \quad , \forall M \in \mathcal{P}_p(N), \tag{10}$$

qu'on déduit de (8) par une manipulation algébrique immédiate.

II - L'HYPOTHESE D'UNITARITE NON PHYSIQUE (UNP).

Nous venons de construire une formulation analytique de l'unitarité physique. Comme cela ressort de (9) et (10), on exprime ainsi des relations entre la détermination principale de différentes sous-matrices de la matrice S et leurs prolongements analytiques à travers les ouvertes I_μ de la région physique. Avant d'aller plus loin, nous allons introduire, à titre d'hypothèse, une certaine généralisation des relations (9) et (10).

II.1 - Notations.

Nous avons convenu de noter par $\lambda_\mu S_L$ ou $\lambda_\mu^{-1} S_L$, le prolongement analytique de la sous-matrice S_L de la matrice S, suivant qu'on vienne du demi-plan $Im(s)<0$ ou $Im(s)>0$. Considérons, s'il existe,

le prolongement de S_L à travers une suite donnée d'ouverts I_μ de la région physique :

$$I_{\mu_1}, \ldots, I_{\mu_p} .$$

Ceci se traduit, par définition, par le passage de la fonction analytique S_L à la fonction méromorphe $\mathcal{L}_{\mu_p} \ldots \mathcal{L}_{\mu_1} S_L$. Dans la suite, on appellera $\mathcal{L}_X$ l'opérateur de prolongent analytique à travers une suite d'ouverts I_μ - qui vérifie la condition Ψ suivante :

$\Psi \equiv \{ \mathcal{L}_X S_M$ et $(\mathcal{L}_X S_M)^{-1}$ sont méromorphes dans G_0 et ont une limite continue sur $\mathbb{R}_+$, que l'on vienne du demi-plan $Im(s)>0$ ou $Im(s)<0 \}$

$\mathcal{L}_X$ apparaît donc comme un produit d'opérateurs $\mathcal{L}_\mu^{\pm 1}$ $(M \in \mathcal{P}_p(N))$, que nous avons définis au chapitre 0. La condition Ψ ci-dessus implique en outre que $\mathcal{L}_X S_M$ n'a de zéros et pôles qu'isolés dans G_0 et sur $\mathbb{R}_+$, de quelque côté qu'on prenne la limite.

II.2 - Formulation de l'unitarité non physique (UNP).

Soit S_M $(M \in \mathcal{P}_p(N))$ une sous-matrice de la matrice S à n voies ; soit $\mathcal{L}_X$ un opérateur de prolongement analytique tel que $\mathcal{L}_X S_M$ vérifie la condition Ψ . On a :

$$\mathcal{L}_X S_M \cdot \mathcal{L}_\mu \mathcal{L}_X S_M = 1 \quad . \tag{11}$$

Les relations du type (11) constituent l'hypothèse d'unitarité non physique.

II.3 - Remarques.

i) La matrice S_M $(M \in \mathcal{P}_p(N))$ étant donnée, il existe au moins trois opérateurs du type $\mathcal{L}_X$:

$$\mathcal{L}_\phi \equiv \mathbb{1} \quad , \quad \mathcal{L}_\mu \, , \, \mathcal{L}_\mu^{-1} .$$

$\mathcal{L}_\phi$ est ici l'opérateur de prolongement analytique le long d'un chemin fermé dans G_0 qui ne traverse jamais $\mathbb{R}_+$:

$$\mathcal{L}_\phi S_M = S_M \qquad \forall M \in \mathcal{P}_p(N).$$

ii) L'hypothèse d'unitarité non physique introduit partiellement une commutativité des opérateurs de prolongement analytique. En effet, s'il existe un opérateur $\mathcal{L}_X$ tel que $\mathcal{L}_X S_M$ vérifie Ψ , on peut prolonger la relation (9) par $\mathcal{L}_X$:

$$\mathcal{L}_X S_M \cdot \mathcal{L}_X \mathcal{L}_\mu S_M = 1 \quad , \quad \forall s \in G_0 \tag{12}$$

ceci, par comparaison avec (11), donne :

$$\mathcal{L}_\mu \mathcal{L}_x S_M = \mathcal{L}_x \mathcal{L}_\mu S_M \quad , \forall s \in \mathcal{G}_0 \, . \tag{13}$$

De même, en appliquant $\mathcal{L}_\mu^{-1}$ sur (11), on obtient :

$$\mathcal{L}_x S_M \cdot \mathcal{L}_\mu^{-1} \mathcal{L}_x S_M = 1 \, , \tag{14}$$

qui avec (11), donne :

$$\mathcal{L}_\mu^{-1} \mathcal{L}_x S_M = \mathcal{L}_\mu \mathcal{L}_x S_M \quad , \forall s \in \mathcal{G}_0 \tag{15}$$

et, avec (10) prolongée par $\mathcal{L}_x$:

$$\mathcal{L}_\mu^{-1} \mathcal{L}_x S_M = \mathcal{L}_x \mathcal{L}_\mu^{-1} S_M \quad , \forall s \in \mathcal{G}_0 \, . \tag{16}$$

iii) L'unitarité non physique est une hypothèse non triviale dont il est difficile d'étudier, au stade où nous sommes, les conséquences. Il faudrait autrement, pouvoir se référer aux éléments d'une théorie qui ne vérifie, comme condition d'unitarité, que l'unitarité physique. Lorsque nous aurons introduit l'unitarité étendue, nous essaierons d'éclairer, encore que partiellement, ce qui résulte de l'extention des relations d'unitarité aux feuillets non physiques.

iv) Dans la suite, et sauf mention contraire explicite, ce qu'on entendra par unitarité physique sera l'ensemble des relations (9) ou (10) et (11). Le terme n'est donc pas pris au sens restreint où l'hyptohèse ne concerne que la détermination principale de S_M et son prolongement analytique direct à travers I_μ.

III - PROPRIETES DE LA MATRICE S ; CAS DE L'UNITARITE PHYSIQUE.

En utilisant un résultat préliminaire établi en appendice A, qui précise l'origine des singularités de certaines matrices construites à partir de la matrice S, on établit en appendice B un résultat fondamental sur les déterminations uniformes de la matrice S.

III.1 - Les prolongements analytiques de la matrice S.

Les hypothèses de T-invariance, causalité, connexité et unitarité physique -et non physique- conduisent au théorème suivant :

Théorème I.1 :

i). Le prolongement analytique de S_M $(M \in \mathcal{P}_p(N))$ le long de tout chemin fermé du plan complexe de s qui ne traverse pas la coupure de gauche ni le segment :

$$J_\mu = [s_1, s_{2n-1}],$$

de la région physique, se ramène au prolongement de S_M par un opérateur λ_ρ associé à un sous-ensemble R de seuils :

$$R = Q \quad \text{ou} \quad R = Q + M \quad , \quad Q \in \mathcal{P}(N-M) \quad . \tag{17}$$

ii). Soit $\lambda_x S_M$ le prolongement analytique de S_M $(M \in \mathcal{P}_p(N))$ le long d'un chemin fermé du plan complexe de s qui ne franchit pas J_μ ni la coupure de gauche. On a :

$$\begin{cases} \lambda_\rho^2 \lambda_x S_M = \lambda_x \lambda_\rho^2 S_M = \lambda_x S_M \\ \lambda_\rho \lambda_{\rho'} \lambda_x S_M = \lambda_{\rho'} \lambda_\rho \lambda_x S_M = \lambda_{\rho' \div \rho} \lambda_x S_M \\ \lambda_\rho \lambda_x S_M = \lambda_x \lambda_\rho S_M \end{cases} \tag{18}$$

R et R' vérifiant (17) et $\lambda_{\rho' \div \rho}$ étant l'opérateur de prolongement associé au sous-ensemble de seuils $R' \div R$. Remarquons enfin que l'ensemble des opérateurs λ_ρ associés par (17) à S_M forme un groupe commutatif fini dont les propriétés sont fixées par (18). L'identité de ce groupe est l'opérateur λ_ϕ tel que :

$$\lambda_\phi S_M = S_M \quad ,$$

qui est l'opérateur de prolongement analytique le long d'un chemin fermé du plan de s qui ne traverse nulle part les coupures de gauche ou de droite. Nous donnerons au chapitre III la forme analytique précise des fonctions $\lambda_\rho S_M$.

III.2 - Décomposition de la matrice S.

A tout ensemble $L \in \mathcal{P}(N)$, on peut associer un sous-ensemble physique $M \in \mathcal{P}_p(N)$ qui est le plus petit sous-ensemble physique de N contenant L. Il peut être défini précisément de la façon suivante :

$$\forall L \in \mathcal{P}(N), \exists M \in \mathcal{P}_p(N) : (L \in \mathcal{P}(M)) \wedge (\forall \alpha \in M), \left(M - \{\alpha\} \notin \mathcal{P}_p(N)\right) \vee \left(L \notin \mathcal{P}(M - \{\alpha\})\right) \tag{19}$$

Définissons les fonctions scalaires $f_i \ (i \in N)$ de la variable complexe s par les deux propriétés :

$$\begin{aligned} &\cdot \forall R_1, R_2 \in \mathcal{P}(N) \text{ et } R_3 = R_2 \div R_1 : \ \alpha_{\rho_2} \alpha_{\rho_1} f_i = \alpha_{\rho_1} \alpha_{\rho_2} f_i = \alpha_{\rho_3} f_i \\ &\cdot \forall j \in N : \quad \alpha_j f_i = \begin{cases} -f_i & \text{si } j = i \\ f_i & \text{si } j \neq i \end{cases} . \end{aligned} \tag{20.1}$$

On pose :

$$\forall P \in \mathcal{P}(N) : \quad f_P \equiv \prod_{i \in P} f_i \quad , \quad f_\phi \equiv 1 \tag{20.2}$$

et

$$\forall M \in \mathcal{P}_p(N) \quad , \quad g_M \equiv \sum_{i \in M} f_i \quad . \tag{20.3}$$

On introduit le symbole de Kronecker étendu aux ensembles :

$$\delta^M_{R \cap M} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad R \cap M \neq M \\ 1 & \text{si} \quad R \cap M = M . \end{cases} \tag{20.4}$$

On établit, en appendice C, le théorème de décomposition suivant :

Théorème I.2 (Décomposition de la matrice S).

L étant une partie quelconque de N et M, le plus petit sous-ensemble physique qui lui soit associé par (19); l'ensemble R, vérifiant :

$$R = Q \quad \text{ou} \quad R = Q + M \quad , \quad Q \in \mathcal{P}(N - M) \ , \tag{20.5}$$

on a les :

i) Formules de décomposition :

$$\alpha_\rho S_L = \sum_{T \in \mathcal{P}(N-M)} \left\{ \sigma^{(L)}_\tau + (-)^{\delta^M_{R \cap M}} g_M \, \sigma^{(L)}_{\tau+\mu} \right\} f_T \, (-)^{\text{Card}(R \cap T)} . \tag{21}$$

ii) Formules de symétrie.

$$\alpha_\rho \sigma^{(L)}_\gamma = \sigma^{(L)}_\gamma \quad , \ \gamma = \tau \ \text{ou} \ \tau + \mu \ , \ \forall T \in \mathcal{P}(N-M) . \tag{22}$$

iii) Formules d'inversion :

$$\sigma^{(L)}_{\tau} = \frac{1}{f_T \cdot 2^{n-m+1}} \sum_{P \in \mathcal{P}(N-M)} (-)^{\mathrm{Card}(P \cap T)} \{ \chi_{\pi} S_L + \chi_{\pi+\mu} S_L \} \qquad (23.1)$$

$$\sigma^{(L)}_{\tau+\mu} = \frac{1}{f_T g_M 2^{n-m+1}} \sum_{P \in \mathcal{P}(N-M)} (-)^{\mathrm{Card}(P \cap T)} \{ \chi_{\pi} S_L - \chi_{\pi+\mu} S_L \} \qquad (23.2)$$

$\forall\, T,\ \in \mathcal{P}(N-M)$.

L'intérêt de ce résultat est d'expliciter une expression de S_L, telle que la partie multiforme à droite soit connue (f_T ou g_M) et que le reste soit constitué de fonctions uniformes dans le plan complexe de s coupé à gauche et sur

$$J_\mu = [\, s_1 , s_{2m-1} \,] .$$

III.3 - La matrice S_M comme fonction analytique complète.

De la première partie du théorème I.1, il résulte que le nombre de fonctions différentes $\chi_X S_M$, définies par prolongement analytique à travers

$$\mathbb{R}_+ - [\, s_1 , s_{2m-1} \,]$$

est égal à 2^{n-m+1} ; cela apparaît trivialement dans l'énoncé du théorème I.2. D'autre part, chaque fonction $\chi_X S_M$ peut être obtenue comme élément terminal d'une chaine finie de prolongements analytiques directs dont l'élément initial est S_M, puisque nous avons la relation de continuité :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \chi_X S_M (s+i\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \chi_{\mu_1} \chi_X S_M (s-i\varepsilon) \quad , s \in I_{\mu_1} \quad , \qquad (24.1)$$

dès que :

$$M_1 \in \mathcal{P}_p(N) \qquad \text{et} \qquad M \in \mathcal{P}_r(M_1) . \qquad (24.2)$$

On peut alors définir une fonction analytique complète $S_M(s)$ par la suite de ses 2^{n-m+1} déterminations différentes :

$$\begin{cases} S_M \mid G_p \equiv \chi_p S_M \mid G_0 \\ \forall\, R = Q \text{ ou } Q+M \quad , Q \in \mathcal{P}(N-M) . \end{cases} \qquad (25)$$

Chacun des domaines G_ρ ainsi définis, est un connexe homéomorphe au domaine G_o que nous avons déjà défini. Le domaine de méromorphie Γ_M de la fonction analytique complète $S_M(\lambda)$ est aussi un connexe ; c'est, plus précisément, une surface de Riemann à 2^{n-m+1} feuillets, chacun coupé à gauche et sur la ligne joignant s_1 à $\lambda_{2^{m-1}}$. Nous avons :

$$\Gamma_M = \bigcup_{R \in \mathcal{P}(N-M)} \{ G_\rho \cup G_{\rho+\mu} \} \quad , \forall M \in \mathcal{P}_\rho(N),$$

et le théorème I.3 :

Théorème I.3 (Domaine de définition de S_M).

Soit S_L une sous-matrice diagonale de S et M le plus petit sous-ensemble physique de N qui contienne L (rel. (19)) ; on a :

i). $S_L(\lambda)$ est une matrice fonction méromorphe et uniforme de s sur une surface de Riemann Γ_M à 2^{n-m+1} feuillets.

ii). Chaque feuillet de Γ_M est coupé à gauche et par un segment joignant s_1 à $s_{2^{m-1}}$.

iii). Chaque seuil de N-M et l'ensemble M lui-même sont des branchements algébriques du premier ordre dans chaque feuillet.

III.4 - Le théorème des chemins UP.

La surface Γ_M est l'ensemble de tous les couples (s, G_ρ) où ρ est la 2-somme d'ensembles R associés à M par :

$$R = Q \quad \text{ou} \quad R = Q + M \quad , \quad Q \in \mathcal{P}(N-M) . \tag{26.1}$$

On définit sur Γ_M, 2^{n-m+1} classes ℓ_ρ de chemins par les propriétés :

i). ℓ_ρ est un homéomorphisme de Γ_M dans lui-même,

ii). $\ell_\rho : G_o \longrightarrow G_\rho$. (26.2)

Ainsi, on a :

$$\ell_\rho (\lambda, G_o) = (\lambda, G_\rho) , \tag{27.1}$$

et alors :

$$(S_M \ell_\rho) \mid G_o = S_M \mid G_\rho . \tag{27.2}$$

Mais puisque :

$$S_M \mid G_\rho = (\ell_\rho S_M) \mid G_o , \tag{27.3}$$

on a aussi :

$$(\lambda_\rho S_M) \mid G_0 = (S_M \ell_\rho) \mid G_0 . \qquad (27.4)$$

Soit un ensemble R' vérifiant la propriété (26.1). On peut appliquer $\lambda_{\rho'}$ sur (27.4) puisque $\lambda_{\rho'}\lambda_\rho S_M$ existe en vertu du théorème I.1 ; on obtient successivement :

$$(\lambda_{\rho'}\lambda_\rho S_M)\mid G_0 = \lambda_{\rho'}[S_M \ell_\rho] \mid G_0 = (S_M \ell_\rho)\ell_{\rho'} \mid G_0 = (S_M \ell_\rho \ell_{\rho'}) \mid G_0 , \qquad (27.5)$$

qui exprime la loi de composition des chemins. Les relations (27.4) et (27.5) expriment les propriétés de la correspondance entre chemins sur Γ_M et opérateurs de prolongement analytique. Il convient de remarquer à ce propos la signification de la relation (27.5) : le produit de composition des chemins est le transposé du produit des opérateurs de prolongements analytiques qui leur correspondent par (27.4). Comme, cependant, le produit des opérateurs ℓ_ρ est commutatif (voir th. I.1), nous avons :

$$(\lambda_{\rho'}\lambda_\rho S_M) \mid G_0 = (S_M \ell_\rho \ell_{\rho'}) \mid G_0 = (S_M \ell_{\rho'} \ell_\rho) \mid G_0 . \qquad (27.6)$$

Il suit de tout cela le théorème des chemins UP :

Corollaire I.4.

L'ensemble des classes de chemins ℓ_ρ sur Γ_M défini par (26), muni de la loi de composition (27.6) est un groupe abélien tel que :

$$\ell_\rho^2 = \ell_\phi ,$$

où ℓ_ϕ est l'élément unité ; c'est la classe des chemins fermé ne franchissant jamais $\mathbb{R}_+$.

III.4 - Propriétés des déterminants diagonaux.

Comme les théorèmes I.1 et I.3 sont vrais pour S_M, ils le sont pour tout S_{ij} si $i \neq j \in M$, donc aussi pour les déterminants diagonaux de tous ordres de S_M.

Plus précisément, si L est une partie quelconque de N, et si M est le plus petit ensemble physique qui lui soit associé par la relation (19), les théorèmes (I.1) et (I.3) restent vrais en y remplaçant S_M par Δ_L .

Il en est de même pour le théorème I.2, à ceci près que les matrices fonctions $\sigma_\gamma^{(L)}$ deviennent des fonctions scalaires.

III.5 - Remarques.

Il est facile de voir que seul l'élément de matrice $S_{11}(s)$ est défini sur une surface de Riemann à 2^n feuillets où tous les seuils de N sont des points de branchement algébrique du premier ordre (racine carrée). C'est le seul cas où disparaît la coupure joignant les seuils de M. En général, dans le cas de l'unitarité physique -et non physique- la coupure $[s_1, s_{2m-1}]$ a une structure imprévisible ; le domaine de S_{22} peut, par exemple, avoir comme particularité :

. s_1 (ou s_2) comme point régulier sur $\Gamma_{1,2}$, et alors s_2 (ou s_1) est un point de branchement en racine carrée.

. un branchement logarithmique du type :

$$\text{Log} \frac{(s-s_1)^{1/2}}{(s-s_2)^{1/2}} .$$

Par suite, le théorème I.3, qui explicite la structure de Γ_M, ne donne que le nombre minimum de feuillets sur lesquels la matrice S_M est définie.

IV - UNITARITE ETENDUE ET UNITARITE ETENDUE NON PHYSIQUE.

IV.1 - Formulation de l'unitarité étendue.

De l'ensemble des hypothèses formulées au chapitre O, nous avons pu déduire les relations analytiques d'unitarité physique :

$$S_M \cdot {}^t S_M = 1 \qquad \forall M \in \mathcal{P}_P(N) \; ; \tag{9}$$

ce qu'on convient d'appeler unitarité étendue est une généralisation que nous allons préciser de ces relations. Il est facile de voir que les relations (9) traduisent une dissymétrie des différentes voies, en rapport avec la position relative de leurs seuils selon l'énergie. Etendue d'une façon ou d'une autre, l'unitarité consiste à éliminer des formules cette dissymétrie en utilisant un "Principe d'indépendance des seuils normaux"(1)(2) par rapport à l'ordre "naturel" de l'ensemble des seuils.

Comme ce principe ne peut se déduire de nos autres hypothèses, il constitue un postulat. Le seul fondement théorique que nous pouvons lui

donner est qu'il est vérifié en théorie du potentiel[3](*), comme en théorie des champs, à tous ordres de la série de perturbations[2].

L'extension la plus simple et la plus "naturelle" des relations (9) consiste à la supposer toujours vraie quand on y remplace M et α_μ par une partie quelconque L de N et α_λ ; ce dernier est alors l'opérateur de prolongement analytique le long d'un chemin fermé qui ne franchit jamais la coupure de gauche et qui n'enserre parmi les seuils que ceux de L. Nous définissons l'unitarité étendue par le jeu de relations :

$$S_L \cdot \alpha_\lambda S_L = 1 \qquad \forall L \in \mathcal{P}(N) \text{ et } \forall s \in G_0 \,. \tag{28}$$

De cette façon nous avons introduit, dans l'unitarité physique, le principe d'indépendance des seuils normaux d'Olive[8]. Comme nous le verrons au prochain chapitre l'expression (28) est une forme de l'unitarité étendue plus faible que celle classiquement admise[3][5][6]. Il convient aussi de remarquer que (28) est une relation entre la détermination principale de S_L et son prolongement analytique par arc ; ce dernier ne se réduit à un prolongement analytique direct que si $L \in \mathcal{P}(N)$.

IV.2 - L'Unitarité étendue non physique.

Pour que nous puissions obtenir les propriétés classiques du domaine de définition de la matrice S dans le cas de l'unitarité étendue, l'ensemble des 2^n relations (28) nous est apparu insuffisant. En même temps que ces dernières, nous avons dû introduire des "relations d'unitarité étendue non physique".

Supposons que le prolongement analytique $\alpha_\chi S_L$ de la matrice S_L le long d'un arc quelconque -mais donné- existe et vérifie la propriété Ψ déjà introduite :

$\Psi \equiv \{ \alpha_\chi S_L$ et $(\alpha_\chi S_L)^{-1}$ sont méromorphes dans G_0 et continues sur $\mathbb{R}_+$, de quelque côté qu'on prenne la limite $\}$.

On postule alors que $\alpha_\chi S_L$ vérifie la relation d'unitarité :

(*) Ce n'est en fait rigoureusement exact que si les potentiels ne dépendent pas de l'énergie (voir réf. (4) p. 31).

$$\alpha_x S_L \cdot \alpha_x \alpha_x S_L = 1 \cdot \qquad (29)$$

Ceci est une extension non triviale de l'unitarité étendue ; son rôle est fondamental pour la structure du domaine de définition de la matrice S. Comme nous l'avons dit, nous discuterons les conséquences de l'extension de l'unitarité aux feuillets non physiques dans le prochain chapitre. Jusque là lorsque nous parlerons d'unitarité étendue, il sera entendu qu'on se réfère à la fois aux relations (28) et (29).

V - PROPRIETES DE LA MATRICE S, CAS DE L'UNITARITE ETENDUE.

Ce paragraphe est l'exact parallèle du paragraphe III ci-dessus. Nous allons encore nous intéresser aux propriétés analytiques de la matrice S et la structure de son domaine de définition. Les démonstrations ne prennent, cette fois, de forme simple que lorsqu'on s'intéresse aux déterminants de S ; les propriétés des matrices s'en déduirons après que nous aurons établi les propriétés de la matrice K, c'est pourquoi cette étude est reportée à la fin du chapitre II.

V.1- Les propriétés analytiques des déterminants Δ_L

Avec la causalité, la T-invariance, la connexité et l'unitarité exprimée suivant (28) et (29), on démontre en appendice D le théorème suivant sur les prolongements analytiques des sous-déterminants diagonaux de S.

Théorème I.5.

i). Le prolongement analytique de Δ_L $(\forall L \in \mathcal{P}(N))$ le long de tout chemin fermé du plan complexe de s qui ne franchit pas la coupure de gauche, coïncide avec le prolongement analytique par l'opérateur α_ρ associé à un des sous-ensembles de seuils $R \in \mathcal{P}(N)$.

ii). Soit $\alpha_x \Delta_L$ le prolongement analytique de Δ_L le long d'un chemin fermé du plan complexe de s qui ne franchit pas la coupure de gauche. On a :

$$\begin{cases} \alpha_\rho^2 \alpha_x \Delta_L = \alpha_x \alpha_\rho^2 \Delta_L = \alpha_x \Delta_L \\ \alpha_\rho \alpha_x \Delta_L = \alpha_x \alpha_\rho \Delta_L \\ \alpha_\rho \alpha_{\rho'} \alpha_x \Delta_L = \alpha_{\rho'} \alpha_\rho \alpha_x \Delta_L = \alpha_{\rho' \div \rho} \alpha_x \Delta_L \\ \forall R, R' \in \mathcal{P}(N) \end{cases} \qquad (30)$$

iii). Il existe 2^n déterminations uniformes dans G_o de chaque Δ_L , qui sont continues des deux côtés de $\mathbb{R}_+$.

Nous ne nous préoccupperons pas pour l'instant de donner la forme analytique précise des fonctions $\alpha_\rho \Delta_L$; ce sera l'objet du paragraphe I.1 du chapitre II. Il convient de remarquer encore que les 2^n opérateurs α_ρ associés aux parties de N, avec la loi de composition précisée par les relations (30) forme un groupe commutatif fini. L'identité de ce groupe est l'opérateur associé à l'ensemble vide $\emptyset$, comme dans le cas de l'unitarité physique (voir § III.1).

V.2 - Décomposition des déterminants de la matrice S.

Comme dans le cas de l'unitarité physique (voir appendice C), on peut démontrer l'existence d'une formule de décomposition pour chaque sous-déterminant diagonal de la matrice S. Dans le cas de l'unitarité étendue, les résultats qu'on obtient sont plus simples et plus symétriques que ceux énoncés dans le théorème I.2.

Théorème I.6.

Soit un ensemble de fonctions f_i $(i \in N)$ vérifiant

$$\begin{cases} \cdot\ \forall i,j \in N \quad ; \quad \alpha_i f_j = \begin{cases} -f_j & \text{si } i = j \\ f_j & \text{si } i \neq j \end{cases} \\ \\ \cdot\ \forall R, R' \in \mathfrak{P}(N) : \quad \alpha_{\rho_1} \alpha_{\rho_2} f_i = \alpha_{\rho_2} \alpha_{\rho_1} f_i = \alpha_{\rho_2 \div \rho_1} f_i \ , \end{cases} \tag{31}$$

et la notation :

$$f_L \equiv \prod_{i \in L} f_i \quad , \ \forall L \in \mathfrak{P}(N) \ ; \ f_\phi = 1 .$$

On peut démontrer :

i). Les formules de décomposition :

$$\alpha_\rho \Delta_L = \sum_{M \in \mathfrak{P}(N)} (-)^{\text{card}(R \cap M)} f_M \sigma_M^{(L)} \quad , \forall R, L \in \mathfrak{P}(N). \tag{32}$$

ii). Les formules de symétrie :

$$\cdot \quad \alpha_\rho \sigma_M^{(L)} = \sigma_M^{(L)} \quad , \forall L, M, R \in \mathfrak{P}(N). \tag{33}$$

iii). Les formules d'inversion :

$$\sigma_M^{(L)} = \frac{1}{2^n f_M} \sum_{R \in \mathcal{P}(N)} (-)^{\mathrm{Card}(R \cap M)} \lambda_\rho \Delta_L \quad , \forall L, M, R \in \mathcal{P}(N). \tag{34}$$

La relation (33) exprime l'uniformité des fonctions $\sigma_L^{(M)}$ dans $G_0 \cup \mathbb{R}_+$, et la relation (32) la décomposition de toute détermination de Δ_L sur la base de ces fonctions. En comparant aux résultats du § III.2, on voit la simplification apportée par l'extension des relations d'unitarité physique et non physique.

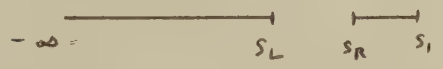
V.3 - Les déterminants Δ_L comme fonctions analytiques complètes.

V.3.1 - Domaine de définition des fonctions Δ_L.

Les théorèmes I.5 et I.6 suffisent à la détermination complète du domaine de définition de la fonction analytique complète $\Delta_L(s)$; à la différence du cas de l'unitarité physique, ce domaine est le même pour chacune des fonctions Δ_L.

Comme nous venons de le voir, le domaine de définition des fonctions $\sigma_M^{(L)}$ est le plan complexe coupé aux singularités dynamiques, donc conformément à la figure suivante :

(1)



La partie multiforme de Δ_L est entièrement regroupée dans les facteurs f_T du développement (32) ; on peut alors définir la fonction analytique complète $\Delta_L(s)$ par la suite de ses 2^n déterminations uniformes :

$$\Delta_L(s) \mid G_\rho \equiv \lambda_\rho \Delta_L \mid G_0 \quad , \forall R, L \in \mathcal{P}(N). \tag{35.1}$$

et son domaine :

$$\mathcal{R}_n = \bigcup_{R \in \mathcal{P}(N)} G_\rho \, . \tag{35.2}$$

Enfin le théorème (I.5), puisque :

$$\lambda_\rho^2 \Delta_L = \Delta_L \quad ,$$

définit une involution sur $\mathcal{R}_n$, on voit que tout chemin du plan de s qui ne franchit pas les singularités dynamiques, ne connecte au plus que deux

déterminations uniformes différentes de $\Delta_L(s)$. Par suite :

Théorème I.7 :

Soit Δ_L un sous-déterminant diagonal quelconque de la matrice S ; on a :

i). Δ_L est définie sur $\mathcal{R}_n$ surface de Riemann à 2^n feuillets tous coupés aux singularités de gauche.

ii). Chaque seuil est, sur chaque feuillet de $\mathcal{R}_n$, un point de branchement algébrique du premier ordre.

V.3.2. - Le théorème des chemins UE.

De façon analogue à ce que nous avons fait au paragraphe III.4, on définit 2^n classes ℓ_ρ de chemin sur $\mathcal{R}_n$ par les deux propriétés :

$$\begin{cases} \text{i). } \forall R \in \mathcal{P}(N) : & \ell_\rho \text{ est un homéomorphisme de } \mathcal{R}_n \text{ dans } \mathcal{R}_n, \\ \text{ii). } \forall R \in \mathcal{P}(N) : & \ell_\rho : G_0 \longrightarrow G_\rho \ . \end{cases} \tag{37}$$

Les relations (27) qui précisent la correspondance entre opérateurs de prolongement analytique et chemin, ainsi que la loi de composition, restent valables ici. Dans ces conditions, nous sommes conduits au théorème des chemins UE :

Corollaire I.8 :

L'ensemble des 2^n classes de chemins ℓ_ρ sur $\mathcal{R}_n$ et la loi de composition définie par (27.5) et (27.6), forment un groupe abélien fini $\mathcal{L}(N)$ dont l'élément neutre est ℓ_ϕ :

$$\begin{cases} \ell_\phi \ell_\rho = \ell_\rho \ell_\phi = \ell_\rho \\ \ell_\rho^2 = \ell_\phi \\ \ell_{\rho_1} \ell_{\rho_2} = \ell_{\rho_2} \ell_{\rho_1} = \ell_{\rho_2 \div \rho_1} \\ \forall R, R_1, R_2 \in \mathcal{P}(N) \end{cases} \tag{38}$$

Ce théorème définit complètement la structure de $\mathcal{R}_n$.

V.3.3 - Indexation des feuillets de $\mathcal{R}_n$.

Les feuillets de $\mathcal{R}_n$, c'est-à-dire les domaines de définition des déterminations uniformes de $\Delta_L(s)$ peuvent être indexés d'une façon simple résultant du corollaire I.8. En effet, le groupe $\mathcal{L}(N)$ est isomorphe au groupe $\mathcal{A}(N)$ constitué par l'ensemble des parties de N muni de $\div$

(différence symétrique) comme loi de composition. D'autre part $\mathcal{H}(N)$ (donc $\mathcal{L}(N)$) est isomorphe au groupe $\mathcal{H}'(N)$ dont les éléments sont les mesures :

$$\mu = \sum_{r=0}^{n-1} 2^r P_M(r) \qquad , \forall M \in \mathcal{P}(N)$$

et dont la 2-somme définie au chapitre 0 :

$$\mu_1 \div \mu_2 = \mu_2 \div \mu_1 = \sum_{r=0}^{n-1} 2^r P_{M_1 \div M_2}(r) \quad , \forall M_1, M_2 \in \mathcal{P}(N)$$

est la loi de composition.

On peut alors faire la correspondance :

$$G_\rho \equiv \rho \qquad ; \tag{39}$$

le passage d'un feuillet à l'autre est alors :

$$\mu_1 \xrightarrow{\rho_{\mu_1 \div \mu_2}} \mu_2 \qquad , \forall M_1 \text{ et } M_2 \in \mathcal{P}(N) \tag{40}$$

Les feuillets de $\mathcal{R}_n$ sont ainsi numérotés de 0 (feuillet physique) à $2^n - 1$.

VI - CONCLUSION.

L'ensemble des hypothèses introduites au chapitre 0, nous a permis d'établir les relations analytiques d'unitarité physique. Pour enrichir encore ce jeu d'hypothèses, nous avons postulé la généralisation de ces relations aux déterminations non physiques des matrices S_M $(M \in \mathcal{P}_p(N))$. De cet ensemble, plus riche de conditions, nous avons enfin pu tirer que la matrice S_M était analytiquement prolongeable à une surface de Riemann à 2^{n-m+1} feuillets où les seuils de N-M sont des branchements algébriques du premier ordre, ainsi que l'ensemble M lui-même.

En choisissant pour expression de l'unitarité étendue, la formulation :

$$S_L \cdot {}^{\lambda}S_L = 1 \qquad \forall L \in \mathcal{P}(N), \forall s \in G_0 ,$$

et en la postulant pour les prolongements ${}^{\lambda}S_L$ de S_L, les résultats obtenus deviennent à la fois plus simples et plus symétriques : Tout déterminant Δ_L est défini sur une surface de Riemann $\mathcal{R}_n$ à 2^n feuillets coupés à gauche, et sur laquelle tout seuil est un branchement algébrique du premier ordre.

Nous retrouvons ainsi les propriétés classiquement attribuées à l'unitarité étendue, mais il nous a fallu, pour cela, la postuler sur le feuillet physique comme sur les feuillets non physiques. Nous allons revenir, au chapitre II, sur cette difficulté.

o

o o

C H A P I T R E II

-:-:-:-:-:-:-:-:-

L'UNITARITE ETENDUE ET LE FORMALISME D/D

-:-

Avec l'unitarité étendue sur tous les feuillets, l'ensemble des hypothèses formulées au chapitre O, nous a conduit à mettre en évidence une propriété analytique commune à tous les sous-déterminants diagonaux de la matrice S : ils sont tous définis sur une surface de Riemann $\mathcal{R}_n$ à 2^n feuillets où les seuils sont -dans chaque feuillet- des points de branchement algébrique du premier ordre ; les singularités dynamiques se présentent comme des coupures dans chacun des feuillets de $\mathcal{R}_n$.

Nous allons, à présent, montrer que les sous-déterminants diagonaux s'expriment comme quotients de différentes déterminations d'une même fonction D sur $\mathcal{R}_n$; l'ensemble de ces expressions constituent le formalisme D/D. Il suit de cela que la matrice K obéit à un formalisme noté B/B, formalisme "réciproque" du précédent, sauf que les fonctions $B_\lambda(s)$ sont des fonctions uniformes de s dans le plan complexe coupé à gauche seulement. Nous nous préoccuperons après cela de la structure des domaines de définition des matrices S et K, de la signification de l'unitarité étendue et de sa généralisation aux feuillets non physiques.

I - PROPRIETES ANALYTIQUES DES DETERMINANTS DE S.

On appellera Δ_L le sous-déterminant de la matrice S associé à l'ensemble $L \in \mathcal{P}(N)$ de voies. Nous allons, d'une part chercher la forme de Δ_L dans chaque feuillet de $\mathcal{R}_n$ et, d'autre part, le genre de $\mathcal{R}_n$.

I.1 - Expression des déterminations non physiques de $\Delta_L(s)$.

D'après l'hypothèse de causalité, la matrice S est une matrice-fonction uniforme de s dans le feuillet physique coupé à gauche, et continue sur les différents ouverts I_μ de la coupure de droite (coupure d'unitarité).

Cette propriété de la matrice S est évidemment vraie pour chacun de ses sous-déterminants, et en particulier, de ses éléments diagonaux
La conséquence première du théorème de décomposition UE (th. I..6) est de montrer que la restriction de $\Delta_L(S)$ à chaque domaine $G_\rho (R \in \mathcal{F}(N))$ jouit de la même propriété.

Nous allons montrer que toute détermination de Δ_L sur tout feuillet de $\mathcal{R}_n$ est exprimable en fonction de déterminations de S (ou plutôt de ses sous-déterminants) pris sur le feuillet physique. Ceci revient à exprimer autrement le fait que les chemins ℓ_ρ sont bien des homéomorphismes de $\mathcal{R}_n$ dans $\mathcal{R}_n$, et le domaine de définition de $\lambda_\rho \Delta_L$ (comme détermination uniforme) est bien G_o.

La relation déterminantale démontrée à l'appendice E peut être déduite de n'importe quelle relation d'unitarité étendue ; donc, on a, en fait :

$$\begin{cases} \Delta_M = \dfrac{1}{\lambda_\mu \Delta_M} = \dfrac{\Delta_L}{\lambda_\mu \Delta_{M-L}} = \dfrac{\Delta_{M-L}}{\lambda_\mu \Delta_L} \\ \forall M \in \mathcal{F}(N) \text{ et } \forall L \in \mathcal{F}(M) \end{cases} \qquad (1)$$

De (1) et de l'unitarité de S_{ii}, il vient immédiatement :

$$\forall R \in \mathcal{F}(N) \text{ et } i \notin R \quad \begin{cases} \lambda_i \lambda_\rho S_{ii} = \dfrac{\Delta_R}{\Delta_{R \cup \{i\}}} \\ \lambda_\rho S_{ii} = \dfrac{1}{\lambda_i \lambda_\rho S_{ii}} \end{cases} , \qquad (2)$$

en posant :

$$R = \phi \quad \Longrightarrow \quad \Delta_R \equiv 1 \ ,$$

ce qui est bien conforme au résultat annoncé.
De même :

$$\forall R \in \mathcal{F}(N) \ , \ i,j \notin R \quad , \ \lambda_\rho \Delta_{ij} = \frac{1}{\lambda_i \lambda_j \lambda_\rho \Delta_{ij}} = \frac{\Delta_{R \cup \{i,j\}}}{\Delta_R} \qquad (3)$$

Or, de (1) on tire aussi :

$$\Delta_{ij} = \frac{S_{ii}}{\lambda_i \lambda_j S_{jj}} = \frac{S_{jj}}{\lambda_i \lambda_j S_{ii}} \ ,$$

soit, en utilisant l'unitarité de S_{ii} et S_{ij} :

$$\Delta_{ijij} = S_{ii} \cdot \mathcal{L}_i S_{jj} = S_{jj} \cdot \mathcal{L}_j S_{ii} \qquad (4)$$

L'expression (4), sous $\mathcal{L}_i$ (par exemple), donne :

$$\mathcal{L}_i \Delta_{iiij} = \frac{S_{jj}}{S_{ii}}$$

qui, prolongée par $\mathcal{L}_\rho$, conduit, compte tenu de (2), à :

$$\mathcal{L}_i \mathcal{L}_\rho \Delta_{iijj} = \frac{\Delta_{Rijj}}{\Delta_{Riij}} \qquad (5)$$

Les relations (3) et (5) montrent que le résultat annoncé est vrai pour tout déterminant diagonal d'ordre 2.

D'une façon générale, soit Δ_L un sous-déterminant diagonal quelconque de S et R un ensemble de voies tel que :

$$L, R \in \mathcal{P}(N) \qquad \text{et} \qquad L \cap R = \emptyset .$$

La relation (1) donne :

$$\mathcal{L}_\lambda \mathcal{L}_\rho \Delta_L = \frac{1}{\mathcal{L}_\rho \Delta_L} = \frac{\Delta_R}{\Delta_{RUL}} \qquad (6)$$

Considérons à présent une partie L_1 quelconque de L. La relation (1) donne :

$$\Delta_L = \frac{\Delta_{L-L_1}}{\mathcal{L}_\lambda \Delta_{L_1}} , \quad \forall L_1 \in \mathcal{P}(L) \qquad (6')$$

donc :

$$\mathcal{L}_{\lambda_1} \Delta_L = \frac{\mathcal{L}_{\lambda_1} \Delta_{L-L_1}}{\mathcal{L}_{\lambda_1} \mathcal{L}_\lambda \Delta_{L_1}} = \left(\mathcal{L}_{\lambda_1} \Delta_{L-L_1} \right) \left(\mathcal{L}_\lambda \Delta_{L_1} \right) \qquad (7)$$

En appliquant la relation (6) par la correspondance

$$\left\{ L \longrightarrow L - L_1 \quad , \quad \mathcal{L}_\rho \longrightarrow \mathcal{L}_{\lambda_1} \right\}$$

à la relation (7) et en introduisant (6') on obtient :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\lambda_1} \mathcal{L}_\rho \Delta_L = \dfrac{\Delta_{(L-L_1)+R}}{\Delta_{L_1+R}} \\ \forall L, R \in \mathcal{P}(N) , \; R \cap L = \emptyset \quad \text{et} \quad \forall L_1 \in \mathcal{P}(L) \end{cases} \qquad (8)$$

Le résultat annoncé est démontré : toute détermination non physique de Δ_L s'exprime de façon unique à l'aide des déterminants diagonaux de S, pris sur le feuillet physique.

I.2 - Le genre de $\mathcal{R}_n$.

Le théorème du domaine (th. I-7) fixe la structure générale de la surface de définition de Δ_L. Comme les relations analytiques d'unitarité nous l'indiquaient, $\mathcal{R}_n$ est un domaine de méromorphie. L'information supplémentaire dont nous disposons précise que :

i) $\mathcal{R}_n$ est une surface à 2^n feuillets coupés aux singularités de gauche.

ii) Dans chaque feuillet de $\mathcal{R}_n$ tout seuil est point de branchement algébrique du premier ordre(*).

La formule de décomposition des fonctions Δ_L (théorème I.6) résume finalement ces deux points. Ce que nous nous proposons d'expliciter avec quelques fondements physiques, est la dépendance précise de Δ_L par rapport aux seuils ; c'est-à-dire; nous cherchons à donner aux fonctions f_i que nous avions définies, une structure algébrique.

La forme la plus générale d'une fonction f_i, est :

$$f_i = \beta_i(s)\,(s-s_i)^{1/2} \quad , \tag{9}$$

où $\beta_i(s)$ est une fonction uniforme de s dans le plan complexe coupé seulement à gauche. Un tel domaine est homéomorphe à l'union du feuillet physique (sur lequel la matrice S est uniforme) et de la coupure d'unitarité.

Ce qu'on choisit habituellement pour fonction f_i, est l'une des fonctions de poids k_i, ρ°_i ou ρ_ℓ (voir ch. 0 § II.1°), relations (6)) :

$$f_i \equiv q_i \quad ; \tag{10}$$

les fonctions (10) ont évidemment la forme (9). Le choix d'une forme fonctionnelle précise pour f_i n'est pas sans conséquences; eneffet, la dynamique du

---

(*) On rappelle que l'ordre d'un point d'un domaine est défini comme le nombre de feuillets qui s'y rattachent, diminué d'une unité. Un point régulier de $\mathcal{R}_n$ est, ainsi, d'ordre 0 et un point de branchement en racine carrée est du premier ordre.

problème étant donnée (elle est ici inconnue), la structure des fonctions $\sigma_M^{(L)}$ du développement de Δ_L est fixée, et on peut montrer(*) que dépendent du choix de f_i :

i) le nombre de zéros et pôles de Δ_L sur $\mathcal{R}_n$,

ii) les comportements asymptotiques de Δ_L.

Un autre indicateur des modifications produites par le choix de f_i, est la variation d'un cas à l'autre du genre[1] g de $\mathcal{R}_n$. La relation donnant le genre g de $\mathcal{R}_n$ en fonction du nombre m de feuillets et des ordres de branchement algébrique r_i en tout point a_i $(i = 1,\ldots q)$ de $\mathcal{R}_n$ est :

$$2\,g = \sum_{i=1}^{q} (r_i - 1) - 2\,m + 2 \qquad (11)$$

L'application de la relation à chacune des fonctions de poids classiques donne les résultats[2] du tableau I.

Tableau I.

fonction de poids q_i	k_i	ρ_i°	ς_i
genre de $\mathcal{R}_n$ g	$g_K = 2^{n-2}(n-3)+1$	$g_{\rho_i^\circ} = 2^{n-2}(n-3)+1$	$g_{\rho_i} = 2^{n-1}(n-2)+1$

En pratique ce tableau signifie qu'en choisissant k_i ou ρ_i°, il existe une transformation conforme qui applique $\mathcal{R}_n$ sur le plan d'une variable complexe convenablement choisie pour les cas de 1 et 2 voies, car :

$$g = 0 \quad .$$

Si on choisit ς_i, une telle transformation n'est possible que dans le cas d'une seule voie.

(*) On le verra au chapitre VI dans l'étude des modèles rationnels. Il faut cependant garder à l'esprit qu'un choix ou un autre pour la fonction f_i est une façon de tenir compte de la partie des singularités de gauche dues à la cinématique.

Compte tenu de nos hypothèses, rien en fait ne s'oppose à définir les opérateurs T, T', K et K' (voir rel. (7) et (8) du chap. O) à l'aide des fonctions k_i. Ce faisant, on ne change d'un cas à l'autre, que les sauts sur la coupure de gauche ; comme nous ne faisons aucune hypothèse à ce sujet, il n'y a pas de conséquences en pratique.

Dans la suite de ce travail, sauf mention contraire explicite, nous choisirons k_i :

$$k_i = (s - s_i)^{1/2} \qquad , \forall i \in N,$$

comme fonctions de poids.

II - LE FORMALISME D/D.

Il existe plusieurs façons d'arriver au formalisme déterminantal ; l'une revient à choisir la forme D/D et montrer l'existence de la fonction D, l'autre à l'établir partant de la matrice K. Nous allons développer la première formulation.

II.1 - Le formalisme déterminantal D/D.

Des relations matricielles d'unitarité étendue, on tire les relations déterminantales :

$$\Delta_L \cdot \mathcal{A}_\lambda \Delta_L = 1 \qquad \forall L \in \mathcal{F}(N) \ .$$

Compte tenu du système de numérotation choisi pour les feuillets de $\mathcal{R}_n$, cette relation peut être réécrite :

$$\Delta_L(o) \quad \Delta_L(\lambda) = 1 \qquad \forall \in \mathcal{F}(N) \ . \tag{12}$$

La théorie non-relativiste de Le Couteur[3] et Newton[4] conduit à chercher s'il existe une fonction D sur $\mathcal{R}_n$ telle que :

$$\Delta_L(o) = \frac{D_\lambda}{D_o} \qquad \forall L \in \mathcal{F}(N) \tag{13}$$

où D_λ est la détermination (uniforme) de D sur le feuillet G_λ de $\mathcal{R}_n$. Comme la matrice S est analytique réelle sur G_o, les relations (8) montrent

que D peut être choisie comme analytique réelle dans chaque feuillet de $\mathcal{R}_n$. Nous ne préoccuperons plus loin des questions relatives à l'existence et l'unicité de D, comme du formalisme D/D lui-même. On remarquera que l'expression (13) vérifie formellement les équations (12) puisque :

$$D_{\lambda \div \lambda} = D_0$$

où $\div$ est l'opération de 2-somme, donne :

$$\Delta_L(\lambda) = \frac{D_0}{D_\lambda} \quad .$$

Une autre remarque consiste à observer que l'expression (13) vérifie identiquement la relation (8) puisque :

$$\alpha_{\lambda_1} \alpha_\rho \Delta_L = \frac{D_{\lambda \div \lambda_1 + \rho}}{D_{\lambda_1 + \rho}}$$

est bien le quotient des deux déterminants :

$$\Delta_{L-L_1+R} = \frac{D_{\lambda \div \lambda_1 + \rho}}{D_0} \quad \text{et} \quad \Delta_{L_1+R} = \frac{D_{\lambda_1+\rho}}{D_0}$$

où $L, R \in \mathfrak{I}(N)$, $L_1 \in \mathfrak{I}(L)$ et $R \cap L = \phi$ -

On a donc :

$$\Delta_L(\rho) = \frac{D_{\lambda \div \rho}}{D_\rho} \qquad \forall R, L \in \mathfrak{I}(N) \qquad (14)$$

Ajoutons que Dahmen et Reiner[5] ont trouvé nos relations (13) pour :

$$\ell = \text{Card}(L) \leq 2$$

à un facteur de phase près :

$$\Delta_L(0) = e^{i\varphi_L(s)} \frac{D_\lambda}{D_0}$$

Comme le cadre choisi par ces auteurs, est l'unitarité physique, nous y reviendrons au chapitre III qui y est consacré. A ce stade, les justifications théoriques au choix (13) comme solution aux équations (12) ne sont que les suivantes :

i) D/D vérifie formellement les équations d'unitarité,

ii) D/D est solution du problème à plusieurs voies de la théorie du potentiel, Newton[4] ayant démontré que D est le déterminant de Fredholm de l'équation de Lippmann-Schwinger.

iii) La fonction D est aussi le déterminant algébrique de la matrice D du formalisme[6] ND^{-1}.

iv) Nous verrons plus loin que certains modèles simples de la théorie des champs sont susceptibles d'une formulation D/D.

II.2 - Les relations de surdétermination.

La fonction D du formalisme D/D doit vérifier des relations de contrainte ; celles-ci proviennent essentiellement de ce que l'on met en correspondance les 2^n déterminations uniformes de D et les 2^n-1 sous-déterminants diagonaux de S par l'intermédiaire des relations (13). A cause de l'hypothèse de T-invariance, la matrice S ne comprend que :

$$\frac{n\ (n+1)}{2}$$

éléments S_{ij} indépendants. Comme le nombre de sous-déterminants diagonaux de S est 2^n-1, il apparaît, dès que $n \geqslant 3$:

$$R_n = 2^n - \frac{n(n+1)}{2} - 1 \quad ,$$

relations de contrainte entre les différentes déterminations de D. Ceci est, bien sûr, aussi vérifié en théorie du potentiel où la relation de contrainte de Newton[4] peut être écrite[7] :

$$(D_oD_7)^2 + (D_1D_6)^2 + (D_2D_5)^2 + (D_3D_4)^2 + 4(D_1D_2D_4D_7+D_oD_3D_5D_6)$$
$$- 2\left\{D_oD_7(D_1D_6 + D_2D_5 + D_3D_4) + D_1D_6\ (D_3D_4+D_2D_5) + D_2D_4D_3D_5\right\} = 0 \qquad (15)$$

Cette relation de contrainte (du problème à 3 voies), nous l'appellerons relation de surdétermination. Si le procédé de construction des relations (15) est simple en principe, il est fastidieux à mettre pratiquement en oeuvre ; il

consiste uniquement à exprimer les sous-déterminants diagonaux d'ordre $n \geq 3$ de la matrice S en termes des éléments diagonaux, et sous-déterminants diagonaux du second ordre de S.

III - DECOMPOSITION STANDARD DE D.

Pour étudier les conséquences sur la matrice K du formalisme D/D, il est utile de définir une décomposition standard de la fonction D. Il existe un théorème[1] sur les fonctions multiformes, fondamental à ce propos, dont la formulation donnée par Dahmen et Reiner[5] est la plus pratique :

théorème C :

Soit f(z) une fonction méromorphe multiforme, définie dans un domaine fermé G du plan complexe de z. Soit H une partie de la surface de Riemann qui comprenne tous les feuillets connectés par des points de branchement $z_i \in G$. Soit A(z) une fonction arbitraire sur H admettant tous les $z_i \in G$ comme points de branchement au même ordre que f(z), on a :

$$f(z) = g_{N-1}(z)\,(A(z))^{N-1} + \cdots + g_0(z) \quad ,$$

N étant le nombre de feuillets de H et les fonctions $g_K(z)$ étant uniformes dans G.

III.1 - Formule de décomposition.

Comme nous traitons les singularités de gauche comme coupures sur $\mathcal{R}_n$, la fonction A(s) :

$$A(s) = \sum_{j=1}^{n} p_j = -i \sum_{j=2^0}^{2^n} k_j \quad , \qquad (16)$$

est définie dans le même domaine D et possède les mêmes points de branchement que celle-ci et aux mêmes ordres. Le coefficient i est tel que la fonction $-ik_j$ soit coupée à droite (pour $s \geq s_j$) et réelle pour $s \leq s_j$.

Le théorème C ci-dessus nous donne :

$$D_0 = \sum_{r=0}^{2^n-1} g_r(s)\,(A(s))^r \quad . \qquad (17)$$

Comme

$$k_j^{2p} = (s-s_j)^p \qquad \text{et} \qquad k_j^{2p+1} = (s-s_j)^p k_j ,$$

la relation (17), en posant :

$$k_L = \prod_{i \in L} k_i \qquad (k_\phi \equiv 1) ,$$

conduit à :

$$D_0 = \sum_{L \in \mathcal{P}(N)} (-i)^{\ell} k_L B_\lambda(s) , \qquad (18)$$

où les fonctions B_λ sont toutes uniformes dans le plan complexe de s coupé seulement à gauche. Comme le théorème des chemins UE est vérifié par D, (18) conduit alors à :

$$D_\mu \equiv D_0 \mid G_\mu = \sum_{L \in \mathcal{P}(N)} (-i)^{\ell} (-)^{\mathrm{Card}(L \cap M)} k_L B_\lambda(s) , \quad \forall M \in \mathcal{P}(N) . \qquad (19)$$

La relation (19) donne l'ensemble des déterminations uniformes de D sur n'importe quel feuillet de $\mathcal{R}_n$.

III.2 - Formule inverse.

La relation (19) permet d'obtenir l'expression des fonctions uniformes B_λ en termes des différentes déterminations de D. En effet, de (19) on tire :

$$\sum_{M \in \mathcal{P}(N)} (-)^{\mathrm{Card}(M \cap L')} D_\mu = \sum_{\substack{M,L \\ \in \mathcal{P}(N)}} (-i)^{\ell} k_L B_\lambda (-)^{\mathrm{Card}(L \cap M) + \mathrm{Card}(L' \cap M)} \qquad (20)$$

Comme :

$$\mathrm{Card}(L \cap M) + \mathrm{Card}(L' \cap M) = \mathrm{Card}\left((L \div L') \cap M\right)$$

modulo un nombre pair, et que :

$$\sum_{M \in \mathcal{P}(N)} (-)^{\mathrm{Card}\left(M \cap (L \div L')\right)} = 2^n \, \delta_{L,L'} ,$$

La relation (20) donne :

$$B_\lambda(S) = \frac{1}{2^n (-i)^\ell k_L} \sum_{M \in \mathcal{P}(N)} (-)^{\mathrm{Card}(L \cap M)} D_\mu \quad , \forall L \in \mathcal{P}(N) \quad . \tag{21}$$

IV - LA MATRICE K ET LE FORMALISME B/B.

Dans le cas de l'onde s, les relations (7) et (8) du chapitre O donnent :

$$\begin{cases} S = k^{-1/2} (1+ik\,K)(1-ikK)^{-1} k^{1/2} \\ K = i\, k^{-1/2} (1-S)(1+S)^{-1} k^{-1/2} \\ K' = k^{1/2} K k^{1/2} \end{cases} \tag{22}$$

Ce jeu de formules peut, d'ailleurs, être considéré comme valable pour toute onde avec une redéfinition évidente de la matrice K, où ne serait plus mis en évidence les comportements aux seuils.

La matrice K étant définie par les relations (22), on démontrera à l'appendice F que :

$$\Delta_L(K) = \frac{i^\ell}{\Delta_N(1+S)\, k_L} \sum_{M \in \mathcal{P}(N)} (-)^{\mathrm{Card}(L \cap M)} \Delta_M(S) \quad . \tag{23}$$

L'expression (9) du même appendice, avec les relations (13) et (21) conduit à :

$$\Delta_N(1+S) = \frac{1}{D_0} \sum_{M \in \mathcal{P}(N)} D_\mu = 2^n \frac{B_0}{D_0} \quad . \tag{24}$$

et les relations (13), compte tenu de (24) et (21) à :

$$\Delta_L(K) = \frac{B_\lambda}{B_0} \quad , \forall L \in \mathcal{P}(N) \quad . \tag{25}$$

D'autre part le résultat général de l'appendice E donne :

$$\Delta_L(K^{-1}) = \frac{\Delta_{N-L}(K)}{\Delta_N(K)} \qquad \forall L \in \mathfrak{I}(N) ,$$

qui, avec (29), s'écrit :

$$\Delta_L(K^{-1}) = \frac{B_{\nu-\lambda}}{B_\nu} \qquad \forall L \in \mathfrak{I}(N). \tag{26}$$

Les relations (25) et (26) constituent le formalisme déterminantal[7] B/B de la matrice K. Les fonctions $B_\lambda(s)$ étant uniformes à droite, cela montre que les déterminants diagonaux de la matrice K le sont aussi, et dans le même domaine. Du point de vue matriciel, cela traduit l'uniformité dans des éléments diagonaux de K et des carrés des éléments non diagonaux. Au point où nous sommes, la matrice K n'est pas nécessairement une matrice-fonction uniforme de s dans $G_0 \cup \mathbb{R}_+$.

Les raisons qui impliquent l'existence de relations de surdétermination pour la fonction D, subsistent pour les fonctions B_λ de la matrice K. On obtient les relations de surdétermination associées à ces dernières fonctions par la simple tranformation:

$$D_\lambda \longrightarrow B_\lambda \qquad \forall L \in \mathfrak{I}(N),$$

tout ce que nous avons dit d'autre à ce sujet au § II.2 ci-dessus, se conserve, sauf que les fonctions $B_\lambda(s)$ ne sont plus différentes déterminations d'une même fonction sur une surface.

V - QUESTIONS D'EXISTENCE ET D'UNICITE.

En supposant l'existence d'une fonction D, nous avons pu déduire les formalismes D/D et B/B. Nous allons à présent justifier l'existence de D en construisant une telle fonction.

V.1 - Existence et unicité de la fonction D.

1 - L'existence de la matrice S est un de nos postulats, le jeu de relations (22) montre que l'existence de la matrice K en est une conséquence immédiate. Les relations (19) et (25) avec $B_0 \equiv 1$ implique l'existence de la fonction multiforme, définie sur $\mathfrak{R}_n$:

$$d(s) = \sum_{L \in \mathfrak{I}(N)} (-i)^{\ell} k_L \, \Delta_L(K) \,,$$

où

$$\Delta_L(K) \equiv 1 \qquad \text{si} \qquad L = \emptyset \,.$$

Par le jeu de relations du formalisme D/D la fonction d représente la diffusion en termes de matrice S, les fonctions $\Delta_L(K)$ la diffusion en termes de matrice K. Il existe donc une fonction d, au moins, vérifiant les hypothèses comme les conséquences du formalisme D/D. Pour qu'on puisse l'identifier à la fonction D "habituelle" il faut, de plus, lui imposer de n'avoir pas de singularités à gauche dans le feuillet physique (pôles, coupures dynamiques). Pour ce faire, définissons un nouveau jeu de fonctions :

$$B_\lambda = B_o \cdot \Delta_L(K) \qquad , \forall L \in \mathfrak{I}(N) \,,$$

où B_o est une fonction uniforme de s telle que la fonction :

$$D = B_o(s) \cdot d \,,$$

n'ait pas de singularités dans le feuillet physique, à gauche. Dans ce feuillet la fonction d peut, a priori, admettre des pôles et zéros aussi bien que des coupures dynamiques. Décomposons d suivant :(*)

$$d(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \, \bar{d}(s) \tag{27}$$

P et Q étant deux polynômes choisis de telle façon que $\bar{d}$ n'ait d'autres singularités dans le feuillet physique à gauche que des coupures dynamiques. D'autre part, posons :

(*) Pour qu'une décomposition telle que (27) soit praticable, il faut supposer que les zéros et pôles de d(s) dans le feuillet physique sont en nombre fini. Bien que la causalité nous assure que cette propriété est vérifiée par la matrice S, rien ne nous dit qu'il en est de même pour d(s). En conséquence de quoi, et pour simplifier, nous allons le supposer. D'autre part, nous n'avons pas d'information sur la limite de d (ou $\bar{d}$) sur la coupure de gauche ; nous la supposerons continue.

$$B_o(s) = \beta(s)\ Q(s)$$

et

$$\left.\begin{aligned} D(s) &= P(s)\ .\ \bar{D}(s) \\ \bar{D}(s) &= \beta(s)\ \bar{d}(s) \end{aligned}\right\} \qquad \text{avec} \qquad (27)$$

Entre D et $\bar{D}$, il n'y a qu'un polynôme multiplicatif de différence ; donc, imposer à D d'être régulière à gauche dans le feuillet O (feuillet physique) revient à l'imposer à la fonction $\bar{D}$. Dire que $\bar{D}$ est régulière à gauche, revient à dire que :

$$\mathrm{Im}\ \mathrm{Log}\ \bar{D} \equiv \mathrm{Im}\ \mathrm{Log}\ \beta + \mathrm{Im}\ \mathrm{Log}\ \bar{d} = 0 \quad , \text{ à gauche} \quad . \qquad (28)$$

Par suite si β est choisie de telle façon que (28) soit vérifié, la fonction D définie par (27) aura les propriétés habituellement admises. Une fonction B_o est alors donnée , à des soustractions près.

$$B_o(s) = Q(s)\ \exp\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{s_G}\frac{\rho(s')}{s'-s}\,ds'\right] = Q(s)\,\beta(s) \quad ,$$

avec

$$\rho(s) = -\,\mathrm{Im}\ \mathrm{Log}\ \bar{d}(s)$$

s_G étant le point final de la coupure de gauche de d(s) dans le feuillet physique. La construction de D que nous venons d'opérer démontre son existence.

2 - Les expressions (13) définissant le formalisme D/D suffisent à montrer que la fonction D n'est pas unique. En effet, la fonction $\mathcal{D}(s)$:

$$\mathcal{D}(s) = f(s)\ .\ D(s) \quad ,$$

où D(s) est une fonction D et f(s) une fonction uniforme quelconque de s, vérifie automatiquement les relations (13). En étudiant les questions d'indétermination expérimentale, nous verrons, qu'en pratique, la fonction D est

définie à une fonction multiforme près.

V.2 - Unicité du formalisme D/D.

L'existence du formalisme D/D est lié au fait que les sous-déterminants diagonaux de S sont tous définis sur $\mathcal{R}_n$. Pour décrire la matrice S à n voies, on sait qu'il existe[6] un formalisme matriciel ND^{-1}. Cela règle donc le problème de l'unicité du formalisme D/D.

a). La non unicité du formalisme déterminantal peut aussi être vérifiée dès le cas d'une seule voie. Pour le montrer, écrivons S_{11} sous la forme :

$$S_{11}(0) = \frac{R(s)}{D_0(s)}$$

où R et D_o sont définies sur le même domaine que S_{11}. Le théorème G du § III conduit à :

$$R(s) = g_1(s)\, D_1 + g_0(s) \quad ,$$

où D_1 est la détermination non physique de D :

$$D_1(k) = D_0(-k)$$

L'unitarité de S_{11} implique que :

$$(g_1 D_1 + g_0)(g_1^* D_0 + g_0^*) = D_0 D_1 \qquad (29)$$

Une solution à (29) est :

$$g_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad g_1 = \pm 1 \qquad (30)$$

mais il en existe d'autres, comme :

$$g_0 = D_0 + D_1 \quad , \quad g_1 = \left[-(D_0+D_1)^2 \pm (D_0^2 + D_1^2) \right] / 2 D_0 D_1 \qquad (31)$$

La solution (30) correspond au formalisme D/D (éventuellement à un signe près) mais ce n'est pas le cas de (31). Cela ne signifie pas, bien sûr, qu'il

n'existe pas un formalisme D/D équivalent à la forme R/D. De celle-ci on déduit K(s) qui est uniforme et de K(s) on peut déduire le formalisme D/D correspondant

b). Si nous nous donnons un ensemble de fonctions uniformes dans :

$$\varphi = \{ \varphi_L(s) \mid \forall L \in \mathcal{B}(N),\ \varphi_L(s) \text{ uniforme dans } G_0 \} ,$$

il est clair que

$$\Delta_L(0) = e^{i\varphi_L(s)} \frac{D_\lambda}{D_0} \qquad \forall L \in \mathcal{B}(N)$$

est solution des équations déterminantales d'unitarité, dès que :

$$\varphi_N(s) = \varphi_{N-L}(s) - \varphi_L(s) .$$

VI - LES DETERMINANTS DE L'AMPLITUDE.

On définit habituellement deux matrices amplitudes T et T' :

$$S = 1 + 2i\,T'$$
$$T' = k^{1/2}\, T\, k^{1/2} \qquad (32)$$

En termes des fonctions D_λ , les relations (32) conduisent aux formules :

$$\Delta_L(T') = \Delta_L(T) \cdot k_L = \frac{1}{(2i)^p} \frac{D_\lambda - D_0}{D_0} , \quad \forall L \in \mathcal{B}(N) . \qquad (33)$$

A côté de ces relations, on peut aussi donner les expressions en termes des fonctions $B_\lambda(s)$. Il suffit de partir de :

$$i\,T'^{-1} = 1 + i\,K'^{-1} , \qquad (34)$$

donc de :

$$\Delta_L(i\,T'^{-1}) = \Delta_L(1 + i\,K'^{-1}) . \qquad (35)$$

En développant (35) suivant l'expression (7) de l'appendice F, on trouve facilement :

$$\Delta_L(i\,T'^{-1}) = \sum_{L' \in \mathcal{B}(L)} \frac{\Delta_{N-L'}(-iK')}{\Delta_N(-iK')} .$$

qui avec les formules (25) donnent :

$$\begin{cases} \Delta_{N-L}(T') = \dfrac{1}{D_0} \displaystyle\sum_{L' \in \mathfrak{I}(L)} (i)^{\ell'-\ell} \; B_{\nu-\lambda'} \; k_{N-L'} \\ \Delta_{N-L}(T) = \dfrac{1}{D_0} \displaystyle\sum_{L' \in \mathfrak{I}(L)} (i)^{\ell'-\ell} \; B_{\nu-\lambda'} \; k_{L-L'} \end{cases} \qquad (36)$$

$$\forall L \in \mathfrak{I}(N).$$

Dans le cas particulier de deux voies, ces relations s'écrivent :

$$\begin{cases} T_{11} = \dfrac{B_1 - i k_2 B_3}{D_0} \quad , \quad T_{22} = \dfrac{B_2 - i k_1 B_3}{D_0} \\ \Delta(T) = \dfrac{B_3}{D_0} \quad , \quad T_{12} = \dfrac{(B_1 B_2 - B_0 B_3)^{1/2}}{D_0} \end{cases}$$

dont on déduit la formule classique de Breit-Wigner à largeur variable si :

$$B_0 = \Delta_R - \Delta \quad , \quad B_1, B_2 = \text{cte} \quad , \quad B_3 \equiv 0 .$$

Les relations (34) conduisent aussi aux relations sur les inverses des déterminants de T :

$$\begin{cases} T^{-1}_{ij} = \left[\dfrac{(B_{\nu-i} B_{\nu-j} - B_\nu B_{\nu-i-j})^{1/2}}{B_\nu} \right] & i \neq j \\ T^{-1}_{jj} = \dfrac{B_{\nu-j}}{B_\nu} - i k_j \end{cases} \qquad (37)$$

en utilisant (26).

VII - UNITARITE ETENDUE ET MATRICE S.

Quand, au chapitre I, nous n'imposions la vérification que de la seule unitarité physique(*), les propriétés que nous obtenions directement étaient relatives à la matrice S. En supposant l'unitarité étendue, les propriétés des chemins, comme les structures du domaine de définition(*), n'ont été mises en évidence que pour les sous-déterminants diagonaux. Il s'agit à présent de remonter de ceux-ci aux éléments de la matrice S.

Il n'y a évidemment aucun problème en ce qui concerne les éléments diagonaux S_{ii} puisque ce sont des sous-déterminants particuliers. Ce n'est pas le cas des éléments non diagonaux, pour lesquels nous ne sommes renseignés que sur les carrés :

$$S_{ij}^2 = S_{ii}\, S_{jj} - \Delta_{ij,ij} \qquad i \neq j \text{ -}$$

Disposant à présent d'informations sur K et K', nous sommes mieux armés pour trouver les propriétés des éléments non diagonaux de S.

VII.1 - Commutativité des chemins pour S_{ij}.

Des définitions (22) et des relations (25), on peut déduire la forme des déterminants diagonaux de K' :

$$\Delta_L(K') = \rho_L\, \Delta_L(K) \qquad \forall L \in \mathcal{P}(N) \tag{38}$$

et, en particulier :

$$K'_{ii} = \rho_i K_{ii} \qquad \text{et} \qquad K'^2_{ij} = \rho_i \rho_j \left(K_{ii} K_{jj} - \Delta_{ij}(K)\right) . \tag{39}$$

Les deux fonctions K_{ii} et N_{ij} :

$$N_{ij} = K_{ij}^2 = \left(K_{ii} K_{jj} - \Delta_{ij}(K)\right) ,$$

sont uniformes dans le plan complexe de s coupé aux singularités de gauche. Par ailleurs, les relations (22) conduisent à :

$$iK' = (1 - S)(1 + S)^{-1} \tag{40}$$

(*) Et, bien sûr, son extension aux feuillets non physiques.

L'hypothèse de causalité et la relation (40) nous permettent de dire que K' est analytique dans le feuillet physique (coupé à gauche) et continue sur tous les ouverts I_μ de la région physique. Par suite, K'^2_{ij} ne peut avoir de zéros ou pôles d'ordre impair en dehors de la droite réelle du plan de s. Supposons de plus que les zéros et pôles réels d'ordre impair sur $\mathbb{R}_+$ de K'^2_{ij} soient tous des points isolés (*). La fonction N_{ij} peut alors être écrite :

$$N_{ij} = R_{ij}(s) \cdot f(s) \quad ,$$

où R_{ij} est une fonction rationnelle contenant les zéros et pôles simples de N_{ij}, et nous avons :

$$K'_{ij} = (k_i k_j)^{1/2} \sqrt{R_{ij}}\ g(s) \qquad (41)$$

où g(s) est une fonction uniforme de s dans le plan coupé à gauche. On peut ainsi toujours définir des chemins de classe ℓ_μ (et ℓ_χ) n'enserrant que les seuils s_i :

$$i \in M \quad ,$$

à l'exclusion des autres points de branchement.

Nous montrerons dans la suite que si R_{ij} n'est pas constant, il a la forme :

$$R_{ij} = \prod_{i \in P} k_i \qquad \text{(P étant une partie de N à préciser)} \quad ,$$

mais, d'ici là, quand nous parlerons d'un chemin, il sera entendu qu'il n'enserre que les seuils. Dans ces conditions, la relation inverse de (40) :

$$S = (1 + iK')(1 - iK')^{-1} \quad ,$$

montre que

$$\alpha_{\rho_1} \alpha_{\rho_2} \alpha_\chi S_{ij} = \alpha_{\rho_2} \alpha_{\rho_1} \alpha_\chi S_{ij} \qquad \forall R_1, R_2 \in \mathcal{R}(N), \qquad (42)$$

les opérateurs α_χ étant ceux donnés par le théorème I.5 (ch. I).

(*) La seule chose qu'on peut, en fait, déduire est que sur l'axe réel, en dehors des coupures dynamiques, les points d'accumulation de zéros et pôles, sur chaque I_μ ($\mu \in \mathcal{P}_p(N)$), ne forment pas un ensemble dense. Il serait suffisant, pour notre propos, de supposer que seuls les seuils sont des zéros ou pôles isolés.

VII.2 - Les prolongements analytiques de S_{ij}.

Il résulte de (42) que les chemins associés aux parties de N sont des chemins de prolongement analytique. Il nous faut, à présent, adjoindre à la commutativité, les autres propriétés des chemins.

A deux voies i et j quelconques de l'ensemble N, on peut associer la relation matricielle d'unitarité étendue :

$$S_{\{i,j\}} \cdot \lambda_i \lambda_j S_{\{i,j\}} = 1 \quad , \tag{43}$$

d'où on tire :

$$\Delta_{ij} = \frac{S_{ii}}{\lambda_i \lambda_j S_{jj}} = \frac{S_{jj}}{\lambda_i \lambda_j S_{ii}} = -\frac{S_{ij}}{\lambda_i \lambda_j S_{ij}} \quad , \tag{44}$$

et

$$(\lambda_i \lambda_j)^2 S_{ij} = S_{ij} \quad , \tag{45}$$

qui est aussi valable par prolongement le long de tout chemin n'enserrant que des seuils.

Enfin, sans avoir à préciser la détermination choisie, nous avons :

$$S_{ij} = (S_{ii} S_{jj} - \Delta_{ij})^{1/2} \quad . \tag{46}$$

De la relation d'unitarité étendue de S_{jj} et des relations (44), on déduit :

$$\begin{cases} \lambda_j S_{jj} = (S_{jj})^{-1} \\ \lambda_j S_{ii} = (\lambda_i \lambda_j S_{ii})^{-1} = \Delta_{ij} / S_{jj} \\ \lambda_j \Delta_{ij} = S_{ii} / S_{jj} \end{cases} \tag{47}$$

En utilisant (46) et (47), on trouve pour le prolongement analytique de S_{ij} par λ_j , $\varepsilon^{\delta}_{ij}$ étant un signe (à préciser) :

$$\lambda_j S_{ij} = i \, \varepsilon^{\delta}_{ij} \, \frac{S_{ij}}{S_{jj}} \quad .$$

Le prolongement analytique de S_{ij} par $\mathcal{L}_i$, donne de même :

$$\mathcal{L}_i S_{ij} = i \, \varepsilon^{i}_{ij} \, \frac{S_{ij}}{S_{ii}} \quad .$$

Les relations (44) montrent alors que :

$$\varepsilon^{i}_{ij} = \varepsilon^{j}_{ij} = \varepsilon_{ij} \quad ; \tag{47'}$$

par suite :

$$\mathcal{L}_j S_{ij} = i \, \varepsilon_{ij} \, \frac{S_{ij}}{S_{jj}} \quad , \tag{18}$$

et l'on tire :

$$\mathcal{L}_j^2 S_{ij} = - S_{ij} \quad . \tag{49}$$

Or, l'ensemble des relations d'unitarité étendue, compte tenu de (45), conduit à :

$$\mathcal{L}_\beta^2 S_{ij} = S_{ij} \quad , \quad \forall R \in \mathcal{P}(N - \{i,j\}) \quad . \tag{50}$$

Par suite, (45), (49) et (50) conduisent :

$$\mathcal{L}_\beta^2 \mathcal{L}_\alpha S_{ij} = (-)^{\mathrm{Card}(R \cap \{i,j\})} \mathcal{L}_\alpha S_{ij} \, . \tag{51}$$

La forme analytique des prolongements de S_{ij} est simple à déduire ; à côté des prolongements définis déjà par (48), (49) et (50), les relations matricielles d'unitarité étendue conduisent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_\mu \mathcal{L}_i \mathcal{L}_j S_{ij} = \left(S^{-1}_{M \cup \{i,j\}} \right)_{ij} \; ; \quad \mathcal{L}_\mu S_{ij} = - \mathcal{L}_\mu \Delta_{ij} \left(S^{-1}_{\{i,j\} \cup M} \right)_{ij} \\ \mathcal{L}_j \mathcal{L}_\mu S_{ij} = i \, \varepsilon_{ij} \, \dfrac{\mathcal{L}_\mu S_{ij}}{\mathcal{L}_\mu S_{jj}} = i \, \varepsilon_{ij} \, \dfrac{\Delta_{M \cup \{i,j\}}}{\Delta_{M \cup \{j\}}} \left(S^{-1}_{\{i,j\} \cup M} \right)_{ij} \\ \forall M \in \mathcal{P}(N - \{i,j\}) \end{array} \right. \tag{52}$$

en utilisant, aussi, les relations (2) et (5).

L'ensemble des déterminations uniformes de S_{ij} montre que les seules singularités de cette fonction (mis à part les pôles et coupures de gauche) ne peuvent être que les seuils. Les relations (40) et (41) nous conduisent à la conclusion que les seules singularités possibles pour les éléments non diagonaux de K' et K (autres, bien sûr, que les pôles et coupures dynamiques) sont les seuils; plus précisément, les seuls pôles ou zéro simples possibles des expressions :

$$B_i B_j - B_{ij} B_\circ = B_\circ^2 K_{ij}^2 \quad ,$$

ou de

$$B_{\nu-i} B_{\nu-j} - B_{\nu-i-j} B_\nu = B_\nu^2 \left(K^{-1}{}_{ij}\right)^2$$

sont les seuils.

VII.3 - Domaines de définition des matrices S et T.

Les relations (51) résument les propriétés des chemins. Elles montrent que si tout seuil est point de branchement algébrique du premier ordre pour S_{ii} dans chaque feuillet de son domaine, il n'en est pas de même pour S_{ij} :

i) les seuils s_i et s_j sont points de branchement algébrique du troisième ordre (racine quatrième de $(s-s_i)$ et $(s-s_j)$) dans tous les feuillets coupés à gauche ;

ii) les seuils de $N-\{i,j\}$ sont des points de branchement algébrique du premier ordre, dans chaque feuillet.

Si nous définissons T par :

$$S = 1 + 2i\, k^{1/2} T k^{1/2} \quad , \tag{53}$$

les relations du § VII.2 conduisent à :

$$\mathcal{L}_\mu^2 T_{ij} = T_{ij} \quad , \forall i,j \in N \quad , \forall M \in \mathcal{P}(N) \quad . \tag{54}$$

Il s'en suit que la matrice T est définie sur $\mathcal{R}_n$ surface de Riemann où tout seuil est point de branchement algébrique du premier ordre dans chacun des 2^n feuillets.

Les différentes déterminations de T se déduisent facilement de la connaissance de celles de S. En particulier, on trouve :

$$\lambda_j T_{ij} = \varepsilon_{ij} \frac{T_{ij}}{S_{jj}} \qquad \forall i,j \in N \tag{55}$$

VIII - SUR L'UNIFORMITE DE LA MATRICE K.

Pour pouvoir discuter l'uniformité de la matrice K dans le plan complexe de s coupé à gauche, il est utile de voir comment s'introduisent les comportements aux seuils.

VIII.1 - Formalisme déterminantal en onde $\ell \neq 0$.

Les résultats des formalismes D/D et B/B sont, en principe, valables pour toute onde $\ell \neq 0$. Il est communément admis que l'amplitude T' de l'onde ℓ d'un processus, vérifie le comportement suivant aux différents seuils :

$$T'^{(\ell)}_{ij} \underset{s \to s_i, s_j}{\sim} (k_i k_j)^{\ell+1/2} \tag{56}$$

La formulation déterminantale de cette condition est :

$$\Delta_{N-L}(T') \underset{s \to s_i}{\sim} k_{N-L}^{2\ell+1} \quad , \forall i \in N-L \quad , L \in \mathfrak{Z}(N) \tag{57}$$

Dans ce cas, où il y a conservation, dans la transition, de la valeur de ℓ, ce nombre quantique peut être adjoint au couple (JP) des nombres quantiques associé aux grandeurs conservées.

La relation (42) peut être automatiquement prise en compte dans l'expression (19) de la fonction D, en imposant à toute fonction $B_\rho(s)$ ($\lambda \neq 0$) d'avoir un zéro d'ordre ℓ , c'est-à-dire :

$$B_\rho(s) = B'_\rho(s) \prod_{i \in R} (s - s_i)^\ell \quad , \forall R \in \mathfrak{Z}(N) \quad , R \neq \emptyset .$$

Les fonctions B'_ρ ayant une limite constante (différente de zéro) pour tout seuil s_i de l'ensemble R. On peut obtenir formellement le même résultat en faisant, dans (19), la transformation :

$$k_i \longrightarrow k_i^{2\ell+1} \qquad \forall i \in N \tag{58}$$

Si la formule définissant K en fonction de S est toujours la première relation (22), nous aurons :

$$K_{ii} = k_i^{2\ell} \frac{B'_i}{B_0} \quad , \quad K_{ij} = k_i^{\ell} k_j^{\ell} \frac{(B'_i B'_j - B_0 B'_{i+j})^{1/2}}{B_0} . \tag{59}$$

Avec la définition (22) de la matrice K, les éléments non diagonaux sont donc des fonctions multiformes de s, admettant au moins les seuils comme points de branchement. En utilisant le § VII.2, on peut même déduire que le radicande n'introduit pas de points de branchement hors des coupures dynamiques

Si, par contre, on change la définition (22) de la matrice K à l'aide de la transposition[8] (58) :

$$S = k^{-\ell-1/2} (1+i k^{2\ell+1} K)(1-i k^{2\ell+1} K)^{-1} k^{\ell+1/2} , \tag{60}$$

on obtient une matrice K uniforme vérifiant :

$$K_{ii} = \frac{B'_i}{B_0} \quad , \quad K_{ij} = \frac{(B'_i B'_j - B_0 B'_{i+j})^{1/2}}{B_0} . \tag{61}$$

VIII.2 - Uniformité de la matrice K.

La relation (55) du paragraphe VII.3 montre que le prolongement par α_i de T_{ij} contient une indétermination dûe au signe :

$$\varepsilon_{ij} = \pm 1$$

Il se pose alors la question de savoir si une des possibilités dans la valeur de ce signe peut ou non être exclue. Il résulte, d'ores et déjà, du paragraphe VIII.1 que ce n'est pas possible si nous ne précisons pas la nature du comportement de T_{ij} aux points s_i et s_j. D'une manière générale, si on pose :

$$T_{ij} = \left(\frac{k}{k_i}\right)^{\ell_i} \left(\frac{k}{k_j}\right)^{\ell_j} \tau_{ij} \quad , \tag{62}$$

la relation (55) conduit à :

$$\lambda_j \tau_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{(-1)^{\ell_j}} \frac{\tau_{ij}}{S_{jj}} \quad ; \quad \lambda_j^2 \tau_{ij} = \tau_{ij} \quad , \tag{63}$$

et la condition (47') devient :

$$\ell_i + \ell_j = 2p \quad . \tag{64}$$

Si on admet que τ_{ij} tend vers une constante non nulle en s_i et s_j, la condition (64) traduit le fait que la parité est supposée conservée dans les transitions. Si on définit toujours la matrice K par (22), il est alors clair que les éléments non diagonaux K_{ij} peuvent admettre des points de branchement aux seuils i et j. Un procédé analogue à celui développé au paragraphe VIII.1 permet, malgré tout de définir une matrice K uniforme ; mais la valeur de chacun des éléments K_{ij} aux points s_i et s_j ne peut être fixée tant qu'une hypothèse sur les comportements aux seuils n'est pas introduite.

IX - AMBIGUITE DE LA NOTION D'UNITARITE ETENDUE.

IX.1 - L'Unitarité étendue en théorie du potentiel.

Choisissons pour définir la matrice K la relation (22). Supposer cette matrice uniforme à droite revient à écrire :

$$K = \lambda_\mu K \qquad \forall M \in \mathcal{P}(N) \, , \forall s \in G_0 \cup \mathbb{R}_+ \, . \tag{65}$$

En termes de matrice S, cette relation est équivalente à :

$$i P_M - P_{N-M} \lambda_\mu S + S P_{N-M} - i P_M \cdot \lambda_\mu S = 0 \tag{66}$$

où P_M est le projecteur sur le sous-ensemble de voies M. A des facteurs de normalisation près, (66) est l'équation d'unitarité démontrée en théorie du potentiel[4][8] ; elle traduit exactement l'uniformité à droite de la matrice K.

En notant $R_{P,Q}$ la matrice, généralement rectangle :

$$\{R_{ij}\}, i \in P, \quad j \in Q ,$$

et en remarquant que

$$R_M = P_M R P_M \qquad \forall M \in \mathcal{P}(N),$$

il est facile de décomposer (66) en trois équations indépendantes :

$$\begin{cases} S_M \cdot {}^t S_M = \mathbb{1} \\ S_{M,N-M} + i\, S_M \cdot {}^t S_{M,N-M} = 0 \\ {}^t S_{N-M} - S_{N-M} - i\, S_{N-M,M} \cdot {}^t S_{M,N-M} = 0 \end{cases} \tag{67}$$

Notre extension des relations analytiques d'unitarité physique, coïncide exactement avec la première des relations (67), c'est-à-dire avec une partie seulement des équations d'unitarité étendue (66) de la théorie du potentiel.

IX.2 - L'Unitarité étendue non physique.

i). Avec l'unitarité étendue (première relation (67)) et son extension aux déterminations non physiques de S_M $(M \in \mathcal{P}(N))$, nous avons pu établir que la matrice K était telle que :

i). ses éléments diagonaux sont des fonctions uniformes à droite,

ii). les éléments K_{ij} peuvent admettre les seuils s_i et s_j, comme points de branchements algébriques du premier ordre.

Au paragraphe VIII ci-dessus, nous avons vu qu'à la condition d'introduire une hypothèse convenable sur les comportements aux seuils, les éléments non-diagonaux de la matrice K sont aussi des fonctions uniformes de s à droite.

Par suite, aux comportements aux seuils près, la condition d'unitarité non physique est équivalente aux deux dernières équations (67) de la théorie du potentiel.

ii). A cette explication formelle concernant l'introduction des relations d'unitarité dans tous les feuillets, il est difficile d'adjoindre une interprétation physique claire. On peut cependant donner une justification qui résulte de l'étude du potentiel de Yukawa pour le cas de deux voies[9] ; les relations analytiques d'unitarité étendue non physique, ne peuvent être vérifiées si les forces sont à longue portée par rapport à l'intervalle en énergie qui sépare les seuils :

$$\lambda = \sqrt{s_2 - s_1} \quad .$$

Pour, cependant, pouvoir fonder une telle interprétation, il faudrait procéder à une étude plus générale qui sort des limites de ce travail.

X - CONCLUSIONS.

1°/ - La version, dans le cas de l'unitarité étendue, des théorèmes établis au chapitre I concernant les propriétés de la matrice S sous les chemins et la structure de son domaine de définition, nous conduit à plusieurs résultats :

. Les déterminations non physiques de tout déterminant diagonal de S peuvent s'exprimer comme fonctions des déterminations principales (sur le feuillet physique) d'autres sous-déterminants diagonaux de S.

. Les sous-déterminants diagonaux de la matrice S obéissent à un formalisme, noté D/D ne faisant intervenir qu'une seule fonction définie -et uniforme- sur $\mathcal{R}_n$. Les relations qui traduisent cette structure s'expriment simplement:

$$\lambda_\rho \, \Delta_L = \frac{D_{\lambda \div \rho}}{D_\rho} \qquad \forall L \in \mathcal{P}(N), \ \forall R \in \mathcal{P}(N).$$

. Les sous-déterminants diagonaux de la matrice K obéissent à un formalisme "dual" du précédent que nous avons noté B/B, qui fait intervenir 2^n fonctions uniformes $B_\lambda(s)$. Celles-ci apparaissent comme les fonctions uniformes du développement -dit standard- de la fonction D en puissance de A(s) :

$$A(s) = -i \sum_{\rho=2^0}^{2^{n-1}} k_\rho \quad .$$

Le domaine de définition des fonctions B_λ est toujours le plan complexe de s coupé aux singularités dynamiques.

Nous avons pu montrer que la matrice K n'a pas de points de branchement complexes et, en introduisant une hypothèse supplémentaire ("les pôles et zéros réels des déterminants de K n'ont pas de points d'accumulation") que les seules singularités de branchement -situées sur l'axe réel- sont nécessairement confondues avec les seuils. Ainsi, on trouve que les expressions suivantes ne peuvent avoir de zéros ou pôles simples qu'aux différents seuils :

$$(B_0 K_{ij})^2 = B_i B_j - B_0 B_{i+j} \quad , (D_0 S_{ij})^2 = D_i D_j - D_0 D_{i+j} \; .$$

Cette conclusion mène à une autre : les chemins sont commutatifs pour les éléments non diagonaux de K, S, T ; il suit de là que la matrice T, définie par :

$$S = 1 + 2i\, k^{1/2}\, T\, k^{1/2} \; ,$$

est -à la différence de la matrice S_r définie sur une surface de Riemann $\mathcal{R}_n$ à 2^n feuillets coupés aux singularités dynamiques, où tout seuil est point de branchement algébrique du premier ordre.

Cependant, cette conclusion ne conduit pas à l'uniformité de K dans le plan complexe de s coupé à gauche. Celle-ci résulte de l'introduction d'une hypothèse extérieure relative à la forme du comportement aux seuils de la matrice T.

2°/ - Pour que l'ensemble de ces résultats puisse être établi, nous avons dû introduire une double généralisation des relations analytiques d'unitarité physique. Nous avons, d'une part, supposé que :

$$S_L \cdot \mathcal{S}_\lambda S_L = 1 \qquad \forall L \in \mathcal{P}(N) \; ,$$

et, d'autre part, que ces relations d'unitarité étendue étaient aussi vérifiées par les déterminations non physiques de S_L. Il reste à pouvoir donner à cette généralisation de l'unitarité étendue un fondement physique solide.

°

° °

C H A P I T R E III

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

L'UNITARITE PHYSIQUE ET LE FORMALISME DETERMINANTAL

-:-

Nous replaçant dans le cadre de l'unitarité physique -et non physique- nous montrons d'abord que toutes les déterminations de S_M $(M \in \mathcal{B}_p(N))$ peuvent s'exprimer en termes de la détermination principale des éléments de la matrice S. Remarquant ensuite que les déterminants diagonaux quelconques de celle-ci obéissent aussi à des relations d'unitarité, nous sommes conduit à introduire une nouvelle hypothèse qui, sans réduire le problème à l'unitarité étendue, s'en rapproche. On montre alors qu'on peut définir un formalisme déterminantal de la matrice S analogue au formalisme D/D, bien que plus complexe. Nous pouvons étudier dans ce cadre, et pour le cas de deux voies, les propriétés analytiques de T et K ; on montre que l'uniformité de déterminants de cette dernière matrice n'est pas la solution générale.

I - PROPRIETES ANALYTIQUES DE LA MATRICE S.

Il s'agit, dans le cadre de l'unitarité physique, d'étendre les conclusions contenues dans le théorème des chemins (UP) et dans le théorème de décomposition correspondant. Plus précisément il s'agit de montrer que toute détermination non physique de la matrice S_M $(M \in \mathcal{B}_p(N))$ ou de ses déterminants peut s'exprimer en termes de fonctions sur le seul feuillet physique G_o. Pour cela, il est commode d'introduire une suite d'ensembles physiques $\mathcal{M}$ associés à tout ensemble $L \in \mathcal{B}(N)$

I.1 - Une suite $\mathcal{M}$ d'ensembles physiques associés à L.

I.1.2 - Algorithme de construction de $\mathcal{M}$

Tout ensemble de seuils $L \in \mathcal{B}(N)$ peut être décomposée, de façon unique, en une suite finie de sous-ensembles disjoints de seuils successifs :

$$L = \overset{r}{\underset{i=1}{\cup}} L_i \; : \; L_i \cap L_j = L_i \, \delta_{ij} \quad , \forall i,j \in [1,\cdots,r] \, , \tag{1}$$

où chaque L_i vérifie :

$$\forall \ell \geq m \; ; \; \ell, m \in [1,\cdots,r] : (2^\ell \in L_i) \wedge (2^m \in L_i) \Rightarrow \forall j, \; \ell \leq j \leq m, \; 2^j \in L_i . \tag{2}$$

Les L_i sont les plus grands ensembles disjoints de L et on les ordonne de la façon suivante :

$$\forall \, 2^\ell \in L_i \, , \forall \, 2^m \in L_j : \quad i > j \quad \Rightarrow \quad 2^\ell > 2^m \, . \tag{3}$$

A tout ensemble $L \in \mathcal{P}(N)$, nous avons vu qu'on peut associer un ensemble physique $M \in \mathcal{P}_p(N)$ qui est le plus petit physique contenant L :

$$\forall L \in \mathcal{P}(N) \, , \exists M \in \mathcal{P}_p(N) : \forall \alpha \in M \, , \; \left((M - \{\alpha\} \notin \mathcal{P}_p(N)) \vee (L \notin \mathcal{P}(M - \{\alpha\})) \right) . \tag{4}$$

Nous définissons la suite $\mathcal{M}$ d'ensembles physiques emboités associés à l'ensemble L écrit sous la forme (1), suivant un algorithme qui peut être explicité par une récurrence sur la relation (1) à l'aide de (4) :

$$\begin{cases} M_1 \text{ est le plus petit physique contenant } L = R_o \\ M_2 \quad " \quad " \quad " \quad " \quad M_1 - L = R_1 \\ M_3 \quad " \quad " \quad " \quad " \quad M_2 - R_1 = R_2 \\ " \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \\ M_{k+1} \quad " \quad " \quad " \quad " \quad M_k - R_{k-1} = R_k \end{cases} \tag{5}$$

La chaine (5) est évidemment finie puisque L est un ensemble fini. Il résulte de l'algorithme (10) que si :

$$\mathcal{M} = \{ M_j, \, j \in J \} \quad , \tag{5'}$$

le vide n'en fait pas parti :

$$\phi \notin \mathcal{M} \, , \tag{5''}$$

et les ensembles M_k sont ordonnés :

$$M_1 > M_2 > \ldots > M_k > \ldots \qquad (5'')$$

L'ensemble J d'indice dans (5') va être précisé tout de suite.

I.1.2 - Détermination de l'ensemble d'indices J.

De (5) il suit que :

$$\begin{cases} M_{2p+1} \dot{-} M_{2p+2} = M_{2p+1} - M_{2p+2} = L_{r-p} \\ p \in [0, \ldots, r-1] \end{cases} \qquad (6)$$

Il résulte alors de la relation (6) que le nombre " a " d'ensembles définis par (5) :

$$a = \mathrm{Card}(\mathcal{M})$$

est égal à :

$$a = \begin{cases} 2r & \text{si } 2^0 \notin L \\ 2r-1 & \text{si } 2^0 \in L \end{cases} . \qquad (7)$$

Nous avons, suivant les mêmes cas, deux ensembles possibles J d'indices :

$$J = \begin{cases} \{1, \ldots, 2r\} & \text{si } 2^0 \notin L \\ \{1, \ldots, 2r-1\} & \text{si } 2^0 \in L. \end{cases} \qquad (8)$$

Remarquons que :

$$L_1 = \begin{cases} M_{2r-1} & \text{si } 2^0 \in L \\ M_{2r} \dot{-} M_{2r-1} & \text{si } 2^0 \notin L \end{cases} , \qquad (9)$$

et que, surtout :

$$L = \dot{\sum_{j \in J}} M_j \qquad (10)$$

I.1.3 - Relations entre 2-sommes.

De la relation (6) on tire, par définition des 2-sommes et conformément aux notations adoptées au chapitre 0 :

$$\begin{cases} \mu_{2p+1} \dot{-} \mu_{2p+2} = \lambda_{r-p} \\ \mu_{2r-1} = \lambda_1 \qquad (\text{si } 2^0 \in L). \end{cases} \qquad (11)$$

Nous verrons plus tard l'utilité de ces relations quand nous démontrerons les relations générales d'unitarité physique, (cf. § III).

I.2 - Expression de la matrice S_M sur tout feuillet.

L'ensemble physique M étant donné, nous avons vu que la matrice S_M est prolongeable le long de tout chemin ne traversant, dans aucun feuillet, l'ouvert :

$$\left] s_{20} , s_{2m-1} \right[.$$

Dans ces conditions, tous les prolongements de S_M sont :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\rho S_M \quad , \quad \mathcal{L}_\rho^2 S_M = S_M \\ R = P \quad \text{ou} \quad P+M \quad , \quad \forall P \in \mathcal{P}(N-M) \end{cases} , \tag{12}$$

puisque le théorème I.1 montre que les autres s'y ramènent. Il nous suffit donc de montrer que $\mathcal{L}_\rho S_M$ s'exprime comme une matrice fonction méromorphe sur le feuillet physique G_0.

Tout ensemble R défini par :

$$R = P \quad \text{ou} \quad R = P + M \quad , \quad P \in \mathcal{P}(N-M) , \tag{13}$$

admet une décomposition du type (1), donc une suite $\mathcal{M}$ d'ensembles physiques lui est associable. La construction précise se fait pour chaque R donné. Nous avons donc :

$$R = \dot{\bigcup_{j \in J}} M_j , \tag{14}$$

et la suite des M_j est ordonnée :

$$M_1 \supset \dots \supset M_k \supset \dots \supset M_j \dots . \tag{14'}$$

La formule (23) de l'appendice B montre alors que ;

$$\mathcal{L}_\rho S_M = \left[\dots \left(\left(S_{M_1} \right)^{-1}_{M_2} \right)^{-1}_{M_3} \dots \right]^{-1}_{M} \tag{15}$$

où M est le dernier ensemble de la suite (14') si R = P + M.

Cette expression, peu maléable, a un intérêt théorique certain : si la surface, sur laquelle S_M est définie, est coupée le long des seuils de M, toute détermination non physique peut être exprimée à l'aide des seuls éléments

de la matrice S sur le feuillet physique. En théorie du moins, la connaissance de $S \mid G_0$, suffit à déterminer la matrice S dans tout feuillet où elle est prolongeable, et toute hypothèse sur $S \mid G_0$ détermine la structure de S dans les feuillets non physiques.

I.3 - Expression des déterminants de S.

Si l'expression matricielle des déterminations non physiques de S_M est compliquée -ce qui n'est pas le cas en unitarité étendue-, les expressions déterminantales sont, quant à elles, extrêmement simples. Par un raisonnement analogue à celui développé au paragraphe I du chapitre II, on trouve :

$$\begin{cases} \lambda_\mu \Delta_L = \dfrac{\Delta_{M-L}}{\Delta_M} \\ \lambda_\pi \Delta_L = \dfrac{\Delta_{(M+P)-L}}{\Delta_{M+P}} \\ \lambda_\pi \lambda_\mu \Delta_L = \dfrac{\Delta_{\Gamma+L}}{\Delta_P} \end{cases} \qquad (16)$$

où $P \in \mathfrak{I}(N-M)$; M étant le plus petit ensemble physique associé à L, conformément à la relation (4).

La comparaison de (15) et (16) montre que la perte de précision dûe à une formulation déterminantale est compensée par une plus grande simplicité des formules.

I.4 - Expression de Δ_L en termes de déterminants physiques.

1°/ - Si, L étant donné, M est défini comme le plus petit ensemble physique qui le contienne ; si de plus, on pose :

$$R = P \quad \text{ou} \quad P+M \quad , \forall P \in \mathfrak{I}(N-M) \quad , \qquad (17)$$

on a :

$$\lambda_\rho \Delta_L \mid G_0 = \Delta_L \mid G_\rho$$

G_ρ est homéomorphe à G_o. Comme dans le cas de l'unitarité étendue, le feuillet est entièrement défini par la valeur de ρ . Nous adopterons la notation sans équivoque :

$$\begin{cases} K_\rho \Delta_L \equiv \Delta_L(\rho) \\ \mathcal{L}_\rho \mathcal{L}_{\rho'} \Delta_L = \mathcal{L}_{\rho'} \mathcal{L}_\rho \Delta_L = \Delta_L(\rho' \dot{+} \rho) \end{cases} , \tag{18}$$

où l'opération $\dot{+}$ est la 2-somme définie au chapitre O.

2°/ - Les relations (16) montrent que tout Δ_L est exprimable en termes de sous-déterminants de S sur le feuillet physique. Il existe cependant une expression de S en termes des seuls déterminants physiques que nous allons construire. En utilisant la relation déterminantale démontrée en appendice E ainsi que les notations et relations du paragraphe I ci-dessus, on peut facilement montrer que :

$$\begin{cases} \Delta_L(0) = \Delta_{M_1}(0)\, \Delta_{R_1}(\mu_1) \\ \Delta_{R_1}(0) = \Delta_{M_2}(0)\, \Delta_{R_2}(\mu_2) \\ \vdots \\ \Delta_{R_q}(0) = \Delta_{M_{q+1}}(0)\, \Delta_{R_{q+1}}(\mu_{q+1}) \\ \vdots \\ \Delta_{R_{d-1}}(0) = \Delta_{M_d}(0) \end{cases} \tag{19}$$

où

$$d = 2r \text{ si } 2^\circ \notin L \quad \text{ou} \quad d = 2r-1 \text{ si } 2^\circ \in L \,.\, M_1$$

est aussi le plus petit ensemble physique contenant L. Si, dans (19), on porte chaque ligne dans la précédente, les prolongements analytiques requis étant effectués, on obtient : (*)

$$\Delta_L(0) = \Delta_{M_1}(0) \cdot \Delta_{M_2}(\mu_1) \cdot \Delta_{M_3}(\mu_1 - \mu_2) \cdots \Delta_{M_d}(\mu_1 - \mu_2 + \cdots + (-)^d \mu_{d-1}) \,, \tag{20}$$

(*) Dans (20) comme dans (21), le signe $\dot{+}$ de la 2-somme a été remplacé par + ou - lorsque cette opération coïncidait avec l'addition ou la soustraction habituelle.

qu'on écrit de façon plus concise :

$$\begin{cases} \Delta_L(0) = \prod_{j \in J} \Delta_{M_j}(\gamma_j) \\ \gamma_1 \equiv 0 \quad , \quad \gamma_j = \sum_{q=1}^{k-1} (-)^{q+1} \mu_q \end{cases} \tag{21}$$

L'unicité de la décomposition (21) en sous-déterminants physiques est assurée par l'unicité de la suite $\mathfrak{M}$ associée à L. Avec cette relation, on retrouve aussi le résultat du chapitre I : Δ_L a le même domaine de définition que Δ_{M_1}, ce domaine étant coupé par le segment joignant les seuils de M_1.

II - SUR LES RELATIONS DETERMINANTALES D'UNITARITE PHYSIQUE.

Au chapitre I, nous avons montré que :

$$S_M \cdot \mathcal{L}_\mu S_M = \mathbb{1} \qquad \forall M \in \mathcal{P}_p(N), \tag{22}$$

et que le prolongement analytique $\mathcal{L}_x S_M$ le long de tout chemin qui ne franchit pas la coupure de gauche ou J_μ :

$$J_\mu = [\Delta_1, \Delta_{2m-1}] \ ,$$

se ramène au prolongement par un opérateur $\mathcal{L}_\rho$ associé à une partie de N telle que :

$$R = P \quad \text{ou} \quad R = P + M \ , \ \forall P \in \mathcal{P}(N-M) \ , \ M \in \mathcal{P}_p(N), \tag{23}$$

Les relations matricielles d'unitarité physique s'écrivent donc :

$$\mathcal{L}_\rho S_M \cdot \mathcal{L}_\mu \mathcal{L}_\rho S_M = \mathbb{1} \qquad \forall M \in \mathcal{P}_p(N), \tag{24}$$

et nous en déduisons les relations déterminantales :

$$\mathcal{L}_\rho \Delta_M \cdot \mathcal{L}_\mu \mathcal{L}_\rho \Delta_M = \mathbb{1} \qquad \forall M \in \mathcal{P}_p(N) \ ; \tag{25}$$

dans (24) et (25), $\mathcal{L}_p$ est l'opérateur associé au sous-ensemble R de N défini en (23).

Nous pouvons montrer que tout déterminant diagonal de la matrice S vérifie aussi des relations d'unitarité sous les seules hypothèses de causalité, connexité, Unitarité physique et non physique. Pour éviter une récurrence compliquée, nous nous bornerons au cas des éléments diagonaux de S ; nous étudierons le cas général au paragraphe III après avoir introduit une hypothèse simplificatrice.

On choisit un élément diagonal S_{ii} de la matrice S et on appelle M le plus grand ensemble physique qui ne contienne pas i :

$$M \in \mathcal{P}_p(N) \quad , \quad M \cup \{i\} \in \mathcal{P}_p(N) \; . \tag{26}$$

La relation déterminantale que nous avons démontrée en appendice E conduit à :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} S_{ii} & = & \Delta_{M \cup \{i\}} \cdot \lambda_{i+\mu} \Delta_M \\ \lambda_{i+\mu} S_{ii} & = & \Delta_M \cdot \lambda_{i+\mu} \Delta_{M \cup \{i\}} \; . \end{array} \right. \tag{27}$$

Le produit membre à membre de ces deux relations s'écrit :

$$S_{ii} \cdot \Sigma_{i+\mu} S_{ii} = \Delta_M \cdot \lambda_{i+\mu} \Delta_M \; . \tag{28}$$

Comme :

$$\lambda_i \lambda_\mu = \lambda_{i+\mu}$$

par hypothèse, l'unitarité physique (22) sous forme déterminantale donne :

$$S_{ii} \cdot \lambda_{i+\mu} S_{ii} = \frac{\Delta_M}{\lambda_i \Delta_M} \; . \tag{29}$$

Il résulte du théorème I.1 (voir ch. 1) que les deux fonctions dans le membre de droite de (29) sont prolongeables par λ_i puisque :

$$i \in \mathcal{B}(N-M) \; .$$

Par suite, si les deux fonctions du membre de gauche ne sont pas nécessairement prolongeables par λ_i ou λ_μ , leur produit l'est :

$$\lambda_\mu \left[S_{ii} \cdot \lambda_{i+\mu} S_{ii} \right] = \lambda_i \left[S_{ii} \cdot \lambda_{i+\mu} S_{ii} \right] = \frac{\lambda_i \Delta_M}{\Delta_M} \tag{30}$$

et la forme précise du prolongement se déduit de (16) et de la seconde équation (30). Les relations (25), (28), (29) et (30) donnent :

$$\begin{cases} \left(S_{ii} \cdot \lambda_{i+\mu} S_{ii} \right) \cdot \lambda_i \left(S_{ii} \cdot \lambda_{i+\mu} S_{ii} \right) = 1 \\ \left(S_{ii} \cdot \lambda_{i+\mu} S_{ii} \right) \cdot \lambda_\mu \left(S_{ii} \cdot \lambda_{i+\mu} S_{ii} \right) = 1 \\ \lambda_\mu^2 \left[S_{ii} \cdot \lambda_{i+\mu} S_{ii} \right] = \lambda_i^2 \left[S_{ii} \cdot \lambda_{i+\mu} S_{ii} \right] = \left(S_{ii} \cdot \lambda_{i+\mu} S_{ii} \right) \end{cases} \tag{31}$$

qui sont les relations d'unitarité de S_{ii}. A titre indicatif ces relations donnent pour S_{22} :

$$\begin{cases} \left(S_{22} \cdot \lambda_3 S_{22} \right) \lambda_1 \left(S_{22} \cdot \lambda_3 S_{22} \right) = 1 \\ \lambda_1^2 \left[S_{22} \cdot \lambda_3 S_{22} \right] = S_{22} \cdot \lambda_3 S_{22} \end{cases} \tag{32}$$

III - L'HYPOTHESE DES CHEMINS ET L'UNITARITE PHYSIQUE.

A la vue des relations (29) et (30), il nous paraît intéressant d'introduire une hypothèse simplificatrice qui, sans ramener à l'unitarité étendue, nous permettrait d'écrire des relations plus générales encore et plus simples que les équations d'unitarité physique des éléments diagonaux de S.

III.1 - Hypothèse des chemins (Ch):

L'application des prolongements analytiques par chemins sur les déterminants physiques de S vérifie :

$$\begin{cases} \lambda_\rho^2 \Delta_M = \Delta_M \;, \quad \lambda_{\rho_1}\lambda_{\rho_2}\Delta_M = \lambda_{\rho_2}\lambda_{\rho_1}\Delta_M = \lambda_{\rho_1 \div \rho_2}\Delta_M \\ \forall M \in \mathcal{P}_p(N) \;, \quad \forall R, R' \in \mathcal{P}(N) \end{cases} \tag{33}$$

Cela revient donc à postuler que les déterminants physiques de S vérifient le théorème des chemins (UE).

III.2 - Conséquences analytiques.

En introduisant (33) dans (21) il est facile de voir que :

1°/. Tout déterminant diagonal vérifie les relations (33).

2°/. Tous les sous-déterminants diagonaux de S sont des fonctions définies sur $\mathcal{R}_n$, surface de Riemann à 2^n feuillets dans chacun desquels, tout seuil est un point de branchement algébrique du premier ordre.

III.3 - Relations déterminantales d'unitarité physique.

En utilisant les résultats et les notations du § I et les conséquences de l'hypothèse des chemins (§ III.2), on démontre en appendice G, le résultat suivant:

Théorème III.1

Soit $L \in \mathcal{P}(N)$ un ensemble de seuils auquel on associe sa décomposition en ses plus grands sous-ensembles disjoints (voir la formule (1)) :

$$L = \dot{+}_{i \in I} L_i \qquad , \quad I = \{1, \ldots, r\}$$

ordonnés suivant les valeurs croissantes de i .

. Soit J un ensemble d'indices :

$$J = \begin{cases} \{1, 2, \ldots, 2r-1\} & \text{si} \quad 2^\circ \in L \\ \{1, 2, \ldots, 2r\} & \text{si} \quad 2^\circ \notin L \end{cases} .$$

. Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble associé à L par l'algorithme (5) :

$$\mathcal{M} = \{ M_j , j \in J \}$$

. A l'ensemble $\mathcal{M}_1$ des parties de $\mathcal{M}$, on associe l'ensemble T des 2-sommes de ses éléments :

$$T = \begin{cases} \{ \theta_p \mid p = 1, \ldots, 2^{2r} \} & \text{si} \quad 2^\circ \notin L \\ \{ \theta_p \mid p = 1, \ldots, 2^{2r-1} \} & \text{si} \quad 2^\circ \in L \end{cases} .$$

Tout déterminant de la matrice S vérifie la relation d'unitarité :

$$\prod_{\theta_p \in T} \Delta_L(\theta_p) \, \Delta_L(\lambda \div \theta_p) = 1 \quad , \forall L \in \mathcal{P}(N) . \tag{34}$$

A titre d'exemple, l'élément S_{22} vérifie :

$$S_{22}(0) \cdot S_{22}(1) \cdot S_{22}(2) \cdot S_{22}(3) = 1 \tag{35}$$

qui est bien la relation (32), compte tenu de :

$$\mathcal{L}_1^2 S_{22} = S_{22} .$$

La relation (35) est la relation d'unitarité physique de Leruste et Malamant[1].
Parmi les autres relations (34), on peut écrire celle de $\Delta_{\{1,4\}}$ qui est encore simple :

$$\prod_{\alpha=0}^{7} \Delta_{\{1,4\}}(\alpha) = 1 .$$

V - LE FORMALISME FONCTIONNEL.

1°/ - En utilisant l'hypothèse des chemins que nous venons d'introduire, il est possible de construire un formalisme déterminantal apparenté au formalisme D/D de l'unitarité étendue. La complexité des relations d'unitarité (34) comparée à celles dont nous disposons au chapitre II va, évidemment, se trasuire par une plus grande complexité du formalisme.

La méthode générale d'établissement du formalisme $\alpha D/\alpha D$, consiste à donner aux équations :

$$\begin{cases} \Delta_M(0) \cdot \Delta_M(\mu) = 1 \\ \Delta_L(\mu) = \dfrac{\Delta_{M-L}(0)}{\Delta_M(0)} \end{cases} \qquad (36)$$

une solution de la forme[2] :

$$\begin{cases} \Delta_M(0) = \dfrac{G_\mu^{(M)}}{G_0^{(M)}} = \dfrac{\alpha_\mu^{(M)}}{\alpha_0^{(M)}} \dfrac{D_\mu}{D_0} \\ S_{11}(0) = \dfrac{D_1}{D_0} \end{cases} \qquad (37)$$

Comme tous les déterminants de S sont définis sur $\mathcal{R}_n$, il est clair que toutes les fonctions $\alpha^{(M)}$ et la fonction D sont définies et uniformes dans le même domaine. Nous ne nous préoccuperons pas ici de démontrer l'existence des fonctions $G^{(M)}$, ni leur non-unicité ; on peut en faire une démonstration assez semblable à celle que nous avons donné de la fonction D, en unitarité étendue.

En imposant à toutes les fonctions $\alpha^{(M)}$ d'être uniformes, on retrouve, bien sûr, le cas de l'unitarité étendue.

2°/ - Définissons la suite ordonnée de sous-ensembles physiques :

$$L^{(-1)} = \{\phi\}, \quad L^{(0)} = \{2^0\}, \ldots, L^{(k)} = \{2^0, \ldots, 2^k\}, \ldots, L^{(n)} = N,$$

qu'on peut écrire généralement :

$$\forall i \in \{0, \ldots, n\} : L^{(i)} \in \mathfrak{P}_p(N), \quad L^{(i-2)} \subset L^{(i-1)} \subset L^{(i)}; \quad L^{(-1)} = \phi. \qquad (38)$$

Si m_j est la position de l'ensemble physique M_j dans la suite (38), on a :

$$\Delta_{M_j}(0) = \frac{\alpha_{\mu_j}^{(m_j-1)}}{\alpha_0^{(m_j-1)}} \frac{D_{\gamma_j}}{D_0} \quad . \tag{39}$$

En portant l'expression (39) dans le produit (21) définissant $\Delta_L(0)$, on trouve l'expression générale des déterminants diagonaux de S :

$$\begin{cases} \Delta_L(0) = \left[\prod_{j \in J} \frac{\alpha_{\gamma_j+1}^{(m_j-1)}}{\alpha_{\gamma_j}^{(m_j-1)}} \right] \frac{D_\lambda}{D_0} \\ \gamma_1 \equiv 0 \quad , \quad \gamma_j = \sum_{q=1}^{j-1} (-)^{q+1} \mu_q \end{cases} \tag{40}$$

pour tout $L \in \mathfrak{Z}(N)$ et J étant défini par (8).

3°/ - On peut aussi démontrer par récurrence le résultat suivant[2] :

Théorème III.2.

- La description déterminantale complète d'un processus à n voies, dans le cas de l'unitarité physique et de l'hypothèse des chemins, nécessite l'introduction de n fonctions $\left(D \; ; \alpha^{(M)}, M \in \mathfrak{Z}(N), d_M = 1 \right)$ sur la surface $\mathcal{R}_n$.

- L'expression d'un sous-déterminant diagonal de S, au moins, contient des déterminations de toutes ces fonctions.

4°/ - Si les expressions (40) ont une forme compliquée, en général, des simplifications peuvent se produire. Par exemple, nous avons :

$$S_{22}(0) = \frac{\alpha_3^{(1)}}{\alpha_0^{(1)}} \frac{D_2}{D_0} \quad , \qquad S_{2m_2m} = \frac{\alpha_{2m}^{(m-2)}}{\alpha_\mu^{(m-2)}} \frac{\alpha_\mu^{(m-1)}}{\alpha_0^{(m-1)}} \frac{D_{2m}}{D_0} \quad . \tag{40'}$$

Des simplifications d'un autre ordre peuvent aussi se produire. Dans le cas de deux voies, le formalisme α D/α D donne :

$$S_{11}(0) = \frac{D_1}{D_0} \quad , \quad S_{22}(0) = \frac{\alpha_3^{(1)}}{\alpha_0^{(1)}} \frac{D_2}{D_0} \quad , \quad \Delta(0) = \frac{\alpha_3^{(1)}}{\alpha_0^{(1)}} \frac{D_3}{D_0} \; . \qquad (41)$$

On peut remarquer -et ce phénomène est général[2]- que dans les expressions (41), D apparaît avec ses quatre déterminations alors que $\alpha^{(1)}$ n'apparaît qu'avec deux, seulement, d'entre elles :

$$\begin{cases} \alpha_0^{(1)} \equiv \alpha^{(1)}(k_1, k_2) \\ \alpha_3^{(1)} \equiv \alpha^{(1)}(-k_1, -k_2) \end{cases} .$$

Bien que les déterminations non physiques de S_{11}, S_{22} et Δ font apparaître :

$$\alpha_1^{(1)} \equiv \alpha^{(1)}(-k_1, k_2) \quad , \quad \alpha_2^{(1)} \equiv \alpha^{(1)}(k_1, -k_2),$$

ce résultat a son importance car, on peut démontrer[2] que :

$$\alpha^{(1)}(k_1, k_2) \equiv \alpha^{(1)}(k_1, k_2^2) .$$

A n voies la fonction $\alpha^{(1)}$ est définie sur $\mathcal{R}_{n-1}$, surface à 2^{n-1} feuillets où s_2 est un point régulier alors que les autres seuils sont des branchements algébriques du premier ordre. Il reste à démontrer que les autres fonctions $\alpha^{(M)}$ subissent aussi des simplifications de ce type.

V - LE PROBLEME A DEUX VOIES DANS LE CAS DE l'UNITARITE PHYSIQUE.

En nous plaçant dans le cas d'un problème à deux voies de réaction nous allons exprimer deux propriétés fondamentales de l'unitarité physique concernant la matrice K et la matrice T. Nous supposons également vérifiée l'hypothèse des chemins qui ne peut que simplifier les choses. Malgré cela nous allons voir que la matrice K est généralement une fonction multiforme de s -même si on fait une hypothèse sur les comportements aux seuils- et que la fonction T_{22} a un pôle du deuxième seuil.

V.1 - Propriétés analytiques de la matrice K.

Nous avons :

$$S_{11}(0) = \frac{D_1}{D_0} \quad , \quad S_{22}(0) = \frac{\alpha_3}{\alpha_0} \frac{D_2}{D_0} \quad , \quad \Delta(0) = \frac{\alpha_3}{\alpha_0} \frac{D_3}{D_0} \quad , \qquad (41)$$

et en appliquant le théorème G sur le développement des fonctions multiformes (voir chapitre II), on trouve :

$$\begin{cases} D_0 = B_0 - ik_1 B_1 - ik_2 B_2 - k_1 k_2 B_3 \\ \alpha_0 = A_0 - ik_1 A_1 \end{cases} \tag{42}$$

Par ailleurs, les opérateurs T et K sont définis par :

$$\begin{cases} S = 1 + 2i k^{1/2} T k^{1/2} \\ T = K(1 - ikK)^{-1} \end{cases} \tag{43}$$

en onde s.

En portant (41) et (42) dans (43), on trouve :

$$\begin{cases} K_{11} = \dfrac{A_0 B_1 - k_1 k_2 A_1 B_3}{A_0 B_0 - k_1 k_2 A_1 B_3} \\ K_{22} = \dfrac{A_0 B_2 + (k_1/k_2) A_1 B_1}{A_0 B_0 - k_1 k_2 A_1 B_3} \\ \Delta(K) = \dfrac{A_0 B_3 - (k_1/k_2) A_1 B_1}{A_0 B_0 - k_1 k_2 A_1 B_3} \end{cases} \tag{44}$$

d'où l'on conclut que la matrice K est une fonction multiforme et que, sauf si $A_1(s_2) = 0$, K_{22} et $\Delta(K)$ peuvent présenter une divergence au deuxième seuil.

La nature multiforme de K ne peut disparaître que si A_1 est identiquement nul (ce qui correspond à l'unitarité étendue en onde s).

V.2 - Propriétés de T_{22}.

Les relations (41), (42) et (43) donnent aussi :

$$\begin{cases} T_{11} = \dfrac{B_1 - ik_2 B_3}{D_0} \\ T_{22} = \dfrac{A_0 (B_2 - ik_1 B_3)}{\alpha_0 D_0} + \dfrac{k_1}{k_2} \dfrac{A_1 (B_0 - ik_1 B_1)}{\alpha_0 D_0} \end{cases} \tag{45}$$

Les expressions (45) montrent, qu'en général, la fonction T_{22} peut présenter une divergence, sauf cas particuliers tels que :

i) $A_1(s_2) = 0$ qui traduit une "réduction locale" à l'unitarité étendue.

ii) Le résidu à ce pôle est nul. Ceci est réalisé dans des circonstances cinématiques particulières :

$$\left[\frac{A_1 (B_0 - i k_1 B_1)}{\alpha_0 D_0}\right]_{\Delta = \Delta_2} = 0$$

ou quand les seuils sont confondus.

Dans le cas de l'onde s, seul T_{11} vérifie les conditions habituelles de comportements aux seuils que nous avons exprimées au chapitre II. Si on impose la même condition à T_{22}, on fait disparaître le pôle introduit par l'unitarité physique, mais, en aucun cas la structure multiforme de la matrice K ne peut disparaître. Il est clair que supprimer l'hypothèse des chemins ne peut qu'aggraver les choses.

VI - CONCLUSIONS.

En n'utilisant que les hypothèses formulées au chapitre 0 et I et les conséquences que nous en avons tirées au chapitre I, nous avons pu montrer que, dans les 2^{n-m+1} feuillets où la matrice S_M $(M \in \mathfrak{I}(N))$ est prolongeable, elle est exprimable uniquement à l'aide des déterminations principales d'éléments de la matrice S. Par suite, la structure des déterminations non physiques de S est entièrement fixée par la forme analytique que prend cet opérateur dans le feuillet physique.

En utilisant les relations analytiques d'unitarité, nous avons pu montrer que les déterminants diagonaux de la matrice S vérifient aussi les relations d'unitarité. Nous ne les avons écrites généralement qu'après introduction d'une hypothèse qui conduit à définir tous les déterminants diagonaux de S sur la surface $\mathcal{R}_n$ que nous avons déjà au chapitre II.

L'hypothèse des chemins (Ch), nous a conduit à montrer qu'il existait encore ici un formalisme déterminantal pour décrire la matrice S ; la structure ainsi développée est, bien sûr, beaucoup plus complexe que dans le cas de l'unitarité étendue. Parmi les résultats analytiques généraux, le principal est la nature multiforme de la matrice K. A la différence du cas de l'unitarité étendue, des conditions de comportement aux seuils ne suffisent plus pour en faire une fonction uniforme : La matrice K uniforme à droite ne peut être réalisée qu'en unitarité étendue. Du point de vue topologique, l'unitarité étendue, et sa généralisation non physique, traduit un "principe de connexion minimale" de la surface de Riemann du problème à n voies. En effet, le "principe d'analyticité maximale"de Chew est aussi un "principe d'analyticité minimale" puisque les singularités - dont les seuils -

déduites de la représentation de Mandelstam sont nécessaires ; un principe de "connexion minimale" leur donne le plus bas ordre de branchement possible.

L'étude que nous venons de développer montre qu'une solution du type D/D n'est assurément pas la solution la plus générale du problème[3]. Ceci est vrai à plusieurs égards :

- le fondement d'un formalisme déterminantal -que l'unitarité soit physique ou étendue- suppose l'existence de relations analytiques d'unitarité; l'existence de celles-ci suppose la T-invariance.

- pour trouver que les déterminants de S sont définis sur $\mathcal{R}_n$, il faut, outre l'unitarité physique imposer l'hypothèse des chemins, car l'unitarité non physique ne suffit pas.

Une mise en évidence d'une éventuelle violation de l'unitarité étendue serait d'un grand intérêt théorique. Un test possible est de vérifier une présence de pôle pour T_{22} en s_2. Si dans la plupart des cas physiques, la voie expérimentalement mesurée est la première d'un processus à n voies, il existe un cas où la seconde voie est mesurée ; il s'agit de la collision $\bar{K}N$ à basse énergie en isospin nul où les voies sont :

$\Sigma\pi$ et $\bar{K}N$.

Même ici, cependant, la violation est difficile à mettre en évidence car il faudrait effectuer la collision $\bar{K}N$ à l'arrêt[2] et les moments de Fermi sont élevés dans cette réaction. Une étude phénoménologique récemment tentée[4] n'a pas donné de résultats probants.

o

o o

CHAPITRE IV

-:-:-:-:-:-:-:-

PROPRIETES LOCALES DE LA MATRICE S ET DE LA FONCTION D.

-:-

Nous allons formuler quelques unes des conséquences du formalisme déterminantal développé aux chapitres I et II. Une première série de résultats concerne les propriétés locales de la matrice S ; on peut les considérer comme une extension du théorème bien connu sur la factorisation des résidus aux pôles simples de l'amplitude. En supposant d'abord que les pôles de S (ou T) sont des zéros du même ordre de D_o -détermination uniforme de D dans G_o- on montre que la matrice des polynômes numérateurs de la partie singulière de S est de rang 1 à un ordre précis du développement. En nous plaçant dans un cadre plus général, où la fonction D admet des zéros dans tous les feuillets de $\mathcal{R}_n$, on démontre que des propriétés de factorisation locale peuvent apparaître au voisinage de points réguliers de la matrice S. On montre aussi, au passage, que les propriétés locales de la détermination principale de S, nous renseignent sur la structure de cette matrice dans des feuillets non physiques de $\mathcal{R}_n$.

L'analogie structurelle des formalismes D/D et B/B, montre qu'une part importante des propriétés de la matrice S subsiste pour la matrice K.

Dans un ordre d'idée différent, nous verrons que les déterminations de la fonction D vérifient des relations de conjugaison simples sur la région physique. On en déduira une formulation déterminantale du théorème d'interaction dans l'état final pour le cas de n voies. Nous verrons aussi qu'il existe une expression générale de la variation de la phase de D le long de la région physique ; elle prend une forme simple si on utilise les propriétés d'une fonction introduite par Warnock.

I - THEOREMES SUR LA FACTORISATION DES PARTIES PRINCIPALES.

Il s'est récemment introduit, en interactionsfortes, la possibilité de décrire des particules élémentaires par des pôles multiples. Ce modèle phénoménologique a été rendu nécessaire pour décrire[1][2] la structure en double pic découverte dans le méson A_2 ; l'alternative qui subsiste consiste à trancher, dans la mesure du possible, entre une structure en pôle double ou en un doublet de pôles simples. La découverte récente[3] d'un phénomène de dédoublement du méson f_o ne peut que confirmer l'intérêt de recherches en ce sèns. Du point de vue des principes, la correspondance fondamentale entre pôles et particules élémentaires ne peut que s'enrichir, si de nouvelles expériences confirmaient ce type de phénomènes[*].

Dans le cadre d'hypothèses précises, nous allons établir une généralisation du théorème de factorisation des résidus aux pôles simples de l'amplitude[6][7]. Il nous faut cependant utiliser un résultat préliminaire de théorie des matrices.

I.1 - Lemme IV.1

Soit une matrice F non nulle, symétrique et de dimension n, dont les éléments diagonaux ne sont pas tous nuls. Si tous les sous-déterminants diagonaux d'ordre 2 et 3 sont nuls, la matrice F est de rang 1.

Démonstration.

Tous les indices (i, j, k,...) étant pris dans l'ensemble N des voies, nous avons, par hypothèse :

$$f_{ij}^2 = f_{ii} f_{jj}$$

soit :

$$f_{ij} = \varepsilon_{ij} (f_{ii} f_{jj})^{1/2} \qquad (1)$$

(*) En ce qui concerne le méson A_2, il faut en effet signaler que les résultats expérimentaux ont, à ce jour, donné des informations plutôt contradictoires ; la structure en double pic reste, du moins, confirmée[5] pour l'état de charge négative.

où :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = \pm 1 .$$

On peut vérifier que, compte tenu de (2), la condition d'annulation des déterminants diagonaux d'ordre 3 se réduit à :

$$\varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{jk}\,\varepsilon_{ki} = 1 \qquad i, j, k \in N \quad , \tag{2}$$

où i, j, k sont tous différents. La relation (2) peut être écrite :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{jk}\,\varepsilon_{ik} \qquad \forall i, j, k \in N \ , \ i \neq j \neq k \neq i \ . \tag{3}$$

Considérons l'un des ε_{ij} , par exemple $\varepsilon_{\ell m}$. On a :

$$\varepsilon_{\ell m} = \varepsilon_{\ell i}\,\varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{j\ell}\,\varepsilon_{\ell m} = \varepsilon_{\ell i}\,\varepsilon_{ji}\,\varepsilon_{jm} \ , \tag{4}$$

$(i \neq j \neq \ell \neq i \ , \ \ell \neq m)$, en vertu de (3).

Pour un couple donné (i,j), posons :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_i \varepsilon_j \qquad \text{où} \qquad \varepsilon_i , \varepsilon_j = \pm 1 \ . \tag{5}$$

Pour tout k ≠ i et k ≠ j, on définit :

$$\varepsilon_k = \varepsilon_i \varepsilon_{ik} = \varepsilon_j \varepsilon_{jk} \ . \tag{6}$$

Comme tout $\varepsilon_{\ell m}$ peut s'écrire sous la forme (4), en utilisant (6), on tire :

$$\varepsilon_{\ell m} = \varepsilon_\ell \varepsilon_m \ ,$$

qui avec (1) donne :

$$f_{ij} = \varepsilon_i (f_{ii})^{1/2} \cdot \varepsilon_j (f_{jj})^{1/2} . \tag{7}$$

Ainsi, dans les conditions du lemme IV.1, la matrice F est bien de rang 1. Par ailleurs, l'expression (7) montre que si les éléments diagonaux de F sont nuls, cette matrice est de rang zéro.

I.2 - Théorèmes de factorisation pour l'amplitude.

Comme la relation entre les matrices S et T est :

$$S = 1 + 2i k^{1/2} T k^{1/2} \quad , \tag{8}$$

ces deux opérateurs ont nécessairement les mêmes pôles. Par suite, démontrer des propriétés sur les parties singulières de S ou de T, revient au même.

Supposons que la matrice S ait un pôle d'ordre q en s_p ($q \geqslant 1$) ; au voisinage de ce pôle, nous avons :

$$S(s) \underset{s \to s_p}{\sim} \frac{N(s)}{(s - s_p)^q} + \text{fonction régulière} \quad , \tag{9}$$

où $N(s_p)$ est une matrice régulière et non nulle. Comme nous sommes dans les hypothèses du formalisme D/D, nous allons exprimer nos conditions sur la fonction D. Dans tout ce paragraphe nous supposerons réalisées les conditions restrictives suivantes :

i) Tout pôle de S est un zéro du même ordre de D_o :

$$D_o \underset{s \to s_p}{\sim} a_o (s - s_p)^q \quad , \tag{10}$$

ii) Les fonctions D_i ($i \in N$) ne sont pas toutes nulles en s_p ,

iii) Les fonctions D_λ ($\lambda \neq 0$) n'ont pas de pôle en s_p .

Il convient de remarquer qu'en théorie des interactions fortes, ces hypothèses sont vérifiées dès que le noyau de l'équation de Lippmann-Schwinger vérifie les conditions de Fredholm[8]. Comme cependant, nous ne connaissons pas la structure des interactions fortes, il n'est pas sûr que les conditions restrictives (10) soient vérifiées. Nous allons cependant supposer qu'elles sont réalisées afin d'en déduire quelques résultats d'une grande simplicité ; nous reviendrons sur le cas général au paragraphe II.

I.2.1 - Théorème IV.2.

Les conditions (10) étant réalisées, si la matrice S a l'expression (9), la matrice $N(s_p)$ est de rang 1. On peut l'écrire sous la forme d'un vecteur colonne multiplié tensoriellement par ce même vecteur transposé :

$$N(s_p) = a \otimes a^T .$$

Démonstration.

En vertu du formalisme D/D, on a les relations suivantes :

$$\begin{cases} S_{ii} = D_i / D_o \\ \Delta_{ii,jj} = D_{i+j} / D_o \\ \Delta_{ii,jj,kk} = D_{i+j+k} / D_o \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \forall i,j,k \in N \\ i \neq j \neq k \neq i \end{array} \qquad (11)$$

Dans les relations (11), et dans tout ce paragraphe, les déterminants diagonaux de S sont pris sur le feuillet physique ; le numéro zéro de ce feuillet pourra donc être sous-entendu. En tenant compte de (9), les expressions (11) peuvent être écrites :

$$S_{ii} = \frac{N_{ii}}{D_o} \quad , \quad \Delta_{ii,jj} = \frac{\Delta_{ii,jj}(N)}{D_o^2} \quad , \quad \Delta_{ii,jj,kk} = \frac{\Delta_{ii,jj,kk}(N)}{D_o^3} \qquad (12)$$

Par suite, (12) et (11) donnent :

$$\begin{cases} N_{ii} = D_i \\ \Delta_{ii,jj}(N) = D_{i+j} \cdot D_o \\ \Delta_{ii,jj,kk}(N) = D_{i+j+k} (D_o)^2 \end{cases} \qquad (13)$$

Les conditions (10) montrent que la matrice $N(s_p)$ qui vérifie (13) est, conformément au lemme IV.1, de rang 1 :

$$\text{rang } (N(s_p)) = 1 \quad .$$

Si on pose :

$$Q = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \left[\dfrac{D_1(s_p)}{\alpha_0} \right]^{1/2} \\ \varepsilon_2 \left[\dfrac{D_2(s_p)}{\alpha_0} \right]^{1/2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{2n-1} \left[\dfrac{D_{2n-1}(s_p)}{\alpha_0} \right]^{1/2} \end{pmatrix} \qquad (14)$$

alors, on a :

$$N(s_p) = Q \, \Omega \, Q^T ,$$

ce qui démontre le théorème IV.2.

Corollaire IV.3.

Si dans un voisinage $\mathcal{V}$ de s_p, pôle d'ordre q de S, on se donne le développement de Taylor à l'ordre q-1 des fonctions $(N_{ij})^{1/2}$ ($\forall i \in N$) alors on connaît le développement, dans le même voisinage $\mathcal{V}$, de la matrice N toute entière.

Ceci résulte trivialement de la forme (13).

I.2.2 - Théorème IV.4.

Dans un voisinage $\mathcal{V}$ d'un pôle s_p d'ordre q de S (donc de T) tous les déterminants du second ordre de N, définie par (9), vérifient :

$$\overline{\Delta}_{\{i,j\},h,\ell\}}(N) \equiv \begin{vmatrix} N_{ij} & N_{i\ell} \\ N_{\ell j} & N_{k\ell} \end{vmatrix} \simeq \mathcal{V}(\Delta - \Delta_p)^q$$

Démonstration.

Si $\overline{\Delta}$ est un sous-déterminant diagonal de N

$$i = j \quad , \quad k = \ell$$

le résultat se déduit trivialement de (13). Si $\overline{\Delta}$ ne contient aucun élément diagonal de N, comme

$$S_{ij} = \varepsilon_{ij} \left(D_i D_j - D_0 D_{i+j} \right)^{1/2} / D_0$$

on a, au voisinage de s_p :

$$\Delta_{\{i,j\},h,\ell\}}(N) = \alpha_0^{-2} \varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon_h \varepsilon_\ell \left(D_i D_j D_h D_\ell \right)^{1/2} \times$$

$$\times \left\{ \left(1 - \frac{D_0 D_{i+j}}{D_i D_j} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{D_0 D_{h+\ell}}{D_h D_\ell} \right)^{1/2} - \left(1 - \frac{D_0 D_{i+\ell}}{D_i D_\ell} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{D_0 D_{j+h}}{D_h D_j} \right)^{1/2} \right\} \qquad (15)$$

On vérifie aisément que le crochet dans (15) est de l'ordre de $(\lambda - \lambda_p)^q$. Il est facile de voir que ce résultat se maintient si certains des D_i sont nuls en s_p. Enfin, le cas où $\bar{\Delta}$ contient un seul élément diagonal de N se traite de la même façon.

Le théorème est donc établi.

I.2.3 - Corollaire IV.5.

Dans un voisinage $\mathcal{V}$ de s_p, tout élément de S (ou T) peut toujours être développé en série de Laurent :

$$S_{ij} = \frac{a^{ij}_{-q}}{(s-s_p)^q} + \frac{a^{ij}_{-q+1}}{(s-s_p)^{q-1}} + \dots + \frac{a^{ij}_{-1}}{(s-s_p)} + \text{fonction régulière} \qquad (16)$$

Le développement (16) peut être mis sous la forme :

$$S_{ij} = \frac{P^{ij}_{q-1}}{(s-s_p)^q} + \text{fonction régulière} \qquad (17)$$

où le polynôme P^{ij}_{q-1} est :

$$P^{ij}_{q-1} = a^{ij}_{-q} + a^{ij}_{-q+1}(s-s_p) + \dots + a^{ij}_{-1}(s-s_p)^{q-1} \qquad (18)$$

En appliquant le théorème IV.4, on est conduit au corollaire IV.5 :

Théorème de factorisation des parties principales.

Si la matrice S (ou T) d'un processus à n voies possède un pôle d'ordre q en s_p et vérifie l'hypothèse (10), au voisinage de s_p, les polynômes numérateurs de la partie principale vérifient ;

$$P^{ij}_{q-1} P^{ke}_{q-1} = P^{ie}_{q-1} P^{kj}_{q-1} + \vartheta(s-s_p)^q \qquad (19)$$

et en particulier :

$$(P^{ij}_{q-1})^2 = P^{ii}_{q-1} \cdot P^{jj}_{q-1} + \vartheta(s-s_p)^q \qquad (20)$$

I.2.4 - Remarques.

Avec q = 1, la relation (20) donne le théorème de factorisation aux pôles simples de l'amplitude[6][7]. Avec q = 2, la relation (20) donne le théorème de factorisation du dipôle de Rebbi et Slansky[1] :

$$\left(a^{ij}_{-2}\right)^2 = \left(a^{ii}_{-2}\right)\left(a^{jj}_{-2}\right)$$

mais aussi :

$$2\, a^{ij}_{-1} a^{ij}_{-2} = a^{ii}_{-2} a^{jj}_{-1} + a^{jj}_{-2} a^{ii}_{-1} ,$$

qui relie le résidu au pôle de T_{ij} à ceux de T_{ii} et T_{jj} et aux coefficients "dipolaires" des développements de Laurent. Il s'en suit qu'en général, c'est-à-dire sauf si :

$$a^{ij}_{-1} = a^{ij}_{-2} \qquad (\forall i,j) ,$$

il ne peut y avoir de factorisation des résidus aux pôles de T, que si ces pôles sont simples.

Enfin, il convient de remarquer que la relation (19) montre que la matrice P(s) des polynômes P_{ij} est de rang 1, à l'ordre q près, sous l'hypothèse (10). Ceci n'est cependant pas une théorie générale du rang des matrices-coefficients de P(s); cela nous entraînerait loin de notre propos et nécessiterait déjà une généralisation du lemme IV.1.

II - PROPRIETES LOCALES DE FACTORISATION.

Les trois conditions fondamentales des théorèmes de factorisation qui précèdent sont :

i) un pôle d'ordre q de S est un zéro du même ordre de D_o,

ii) les fonctions $D_i (i \in N)$ ne sont pas toutes nulles en s_p,

iii) les fonctions $D_\lambda (\lambda \neq 0)$ sont toutes régulières en s_p.

Nous allons à présent éliminer ces trois conditions restrictives et examiner les propriétés des développements en série de Laurent des sous-matrices $S_{\{i,j\}}$ de la matrice S à n voies. Dans ce nouveau cadre, nous nous intéresserons à des relations du type (20) seulement (et non pas à des formes

générales du type (19). Ainsi, sauf dans le cas de deux voies, nous disposerons pas d'informations sur le rang des matrices coefficients.

II.1 - Holomorphie de D.

1 - Considérons la sous-matrice $S_{\{i,j\}\{i,j\}}$ de la matrice S à n voies. Ses quatre déterminations uniformes :

$$S_{\{i,j\}\{i,j\}} \mid G_\alpha \qquad , \alpha = 0, i, j, i+j , \tag{21}$$

sont parfaitement déterminées par les quatre déterminations uniformes de D qui suivent :

$$D_0 , D_i , D_j , D_{i+j} ,$$

et les relations du formalisme D/D :

$$S_{ii}(0) = \frac{D_i}{D_0} \quad , S_{jj}(0) = \frac{D_j}{D_0} \quad , \Delta_{\{i,j\}\{i,j\}}(0) = \frac{D_{i+j}}{D_0} . \tag{22}$$

L'ensemble des quatre déterminations (21) s'obtient en appliquant à (22) la règle des 2-sommes d'indices définie au chapitre 0 :

$$\Delta_L(\mu) = \frac{D_{\lambda+\mu}}{D_\mu}$$

2 - On peut imposer à D d'être une fonction holomorphe sur $\mathcal{R}_n$, en dehors des coupures dynamiques dans chaque feuillet. L'existence de ce choix a deux origines :

i) Toutes les déterminations de tous les sous-déterminants diagonaux n'ont de zéros ou pôles qu'en nombre fini à distance finie (voir chapitre II); on peut donc choisir D comme une fonction sur $\mathcal{R}_n$, ayant cette propriété.

ii) On a vu que la fonction D est définie à une fonction uniforme de s près : f(s). En raison de i) f(s) peut être choisie comme une fonction entière ayant des zéros à un ordre suffisant, de telle sorte que les éventuels pôles de D sur $\mathcal{R}_n$ soient éliminés dans le produit :

$$f(s) \, . \, D \qquad .$$

Comme nous avons vu qu'il est impossible de distinguer physiquement D et f(s).D, on peut donc toujours choisir D comme holomorphe sur $\mathcal{R}_n$.

II.2 - Factorisation locale de la matrice $S_{\{i,j\}}$

1 - Pour simplifier l'écriture, nous allons discuter des propriétés de $S_{\{i,j\}}$ au voisinage du point $s = 0$. Il est évident que le cas général se déduit sans modification par un changement de variable :

$$s' = s + s_p .$$

Supposons qu'au voisinage de $s = 0$, on ait :

$$\begin{cases} D_o \sim s^{q_o} Q_o(s) , & D_{i+j} \sim s^{q_{ij}} Q_{ij}(s) \\ D_i \sim s^{q_i} Q_i(s) , & D_j \sim s^{q_j} Q_j(s) , \end{cases} \tag{23}$$

où les fonctions $Q_p(s)$ sont des polynômes en s, non nuls en $s = 0$, et les quatre nombres :

$$q_o , q_i , q_j , q_{ij} ,$$

sont des entiers positifs ou nuls, puisque D est holomorphe sur $\mathcal{R}_n$.

Dans un voisinage du même point, les déterminations principales (22) des déterminants diagonaux de $S_{\{i,j\}}$ s'écrivent :

$$S_{ii} \sim \frac{P_i(s)}{s^{q_o - q_i}} , \quad S_{jj} \sim \frac{P_j(s)}{s^{q_o - q_j}} , \quad \Delta_{\{i,j\}} \sim \frac{P_\Delta(s)}{s^{q_o - q_{ij}}} \tag{24.1}$$

où P_i, P_j et P_Δ sont des polynômes non nuls en $s = 0$. Il est évident que l'écriture (24.1) ne suppose, en réalité, rien sur le signe des quantités :

$$q_o - q_i \quad , \quad q_o - q_j \quad \text{et} \quad q_o - q_{ij} ,$$

qui peuvent être positives, nulles ou négatives(*). De (24.1), on tire enfin :

$$S_{ij}^2 \sim \frac{P_i(s) P_j(s)}{s^{2q_o - q_i - q_j}} - \frac{P_\Delta}{s^{q_o - q_{ij}}} \tag{24.2}$$

2 - Les expressions (24) montrent que l'existence de propriétés de factorisation locale dépendent crucialement des valeurs relatives de :

(*) Le théorème de factorisation du paragraphe I (corollaire IV.5) revient à choisir :

$$q_o > 0 \quad , \quad q_i = q_j = q_{ij} = 0 .$$

$$2q_o - q_i - q_j \quad \text{et} \quad q_o - q_{ij} \quad , \tag{24.3}$$

beaucoup plus que des valeurs de

$$q_o - q_i \quad , \; q_o - q_j \quad , \; q_o - q_{ij} \quad .$$

Nous devons donc envisager plusieurs cas :

i) Si $2q_o - q_i - q_j > 0$, les relations (24) montrent qu'on ne peut voir apparaître de propriétés de factorisation que si :

$$2q_o - q_i - q_j > q_o - q_{ij} \quad , \tag{25}$$

ce qui traduit la prédominance du terme $P_i P_j$ sur P_Δ.

Dans ce cas, on peut écrire (24.2) sous la forme :

$$S_{ij}^2 \sim \frac{P_{ij}^2(s)}{\Delta^{2q_o - q_i - q_j}} = \frac{P_i(s) P_j(s) - \Delta^{\chi} P_\Delta(s)}{\Delta^{2q_o - q_i - q_j}} \quad , \tag{26}$$

en définissant :

$$\chi = q_o + q_{ij} - q_i - q_j \quad . \tag{27}$$

En vertu de (25), χ dans (26) est un nombre entier <u>strictement positif</u>. Il suit alors de (24) et (26) que :

$$P_{ij}^2(s) = P_i(s) P_j(s) + o(\Delta^{\chi}) \quad , \tag{28}$$

qui constitue évidemment une généralisation de la relation (20).

Il convient de souligner que l'existence d'un pôle d'ordre $2q_o - q_i - q_j > 0$ dans S_{ij}^2 n'implique en aucun cas que S_{ii} ait un pôle d'ordre $q_o - q_i > 0$ <u>et</u> que S_{jj} ait, au même point, un pôle d'ordre $q_o - q_j > 0$. L'expression (28) reste vraie si, par exemple :

$$q_o - q_i > 0 \quad \text{et} \quad q_o - q_j \leq 0 \quad ,$$

Pourvu que :

$$2q_0 - q_i - q_j > 0 \quad .$$

Il faut aussi remarquer que le nombre de zéros de D dans le feuillet i + j intervient de façon cruciale.

ii) Si $\varkappa$ est positif et que nous supposons :

$$2q_0 - q_i - q_j \leqslant 0 \quad ,$$

cela conduit à :

$$q_0 - q_{ij} < 0$$

Dans ce cas S^2_{ij} admet un zéro d'ordre :

$$q_i + q_j - 2q_0 \geqslant 0$$

au point s = 0.

En utilisant les relations (24) et (26), cela conduit aux deux relations locales équivalentes :

$$\begin{cases} P^2_{ij}(\Delta) = P_i(s) \cdot P_j(s) + \vartheta(\Delta^{\varkappa}) \\ S^2_{ij}(\Delta) = S_{ii}(s) \cdot S_{jj}(s) + \vartheta\left(\Delta^{q_{ij} - q_0}\right) \end{cases} \qquad (29)$$

iii) Il nous reste à examiner le cas où :

$$2q_0 - q_i - q_j \leq 0 \qquad \text{et} \qquad q_0 - q_{ij} \geqslant 0$$

qui conduit à :

$$\varkappa \leqslant 0 \, .$$

Dans ce cas l'expression (26) montre que le terme en P_Δ domine celui en $P_i P_j$ donc qu'il n'y a aucune propriété de factorisation pour la <u>détermination principale</u> de la matrice $S_{\{i,j\}}$.

3 - Tout ce que nous venons de faire pour la détermination principale de la matrice $S_{ii,jj}$:

$$S_{ii,jj}(0) \quad ,$$

peut, en utilisant le formalisme D/D, être répété point par point pour la détermination non physique :

$$S_{ii,jj}(i+j) \quad ,$$

puisque :

$$S_{ii}(i+j) = \frac{D_j}{D_{i+j}} \quad , \quad S_{jj}(i+j) = \frac{D_i}{D_{i+j}} \quad , \quad \Delta_{ii,jj}(i+j) = \frac{D_0}{D_{i+j}} \quad .$$

Les résultats qu'on obtiendrait ainsi, sont ceux du paragraphe 2 ci-dessus, en y faisant la transposition :

$$(q_0, q_i, q_j, q_{ij}) \xrightarrow{\lambda_{i+j}} (q_{ij}, q_j, q_i, q_0) \quad ,$$

élément par élément. Comme dans cette transposition χ est invariant, le découpage de la démonstration reste le même, les grandeurs (24.3) devenant respectivement :

$$2q_{ij} - q_i - q_j \qquad \text{et} \qquad q_{ij} - q_0 \quad . \tag{30}$$

Les cas de factorisation ($\chi > 0$) et leur propriété sont résumées dans le tableau I ci-dessous.

A priori, les conditions de factorisation sur les feuillets 0 et i+j sont réalisables <u>simultanément</u> ; ces cas sont indiqués dans la dernière colonne (le "ou" qui y figure est <u>exclusif</u>), les numéros qui y figurent renvoient à la première colonne du tableau.

ature et uméro du cas	S_{ij}^2 a un pôle / zéro d'ordre	sur le feuillet n°	S_{ij}^2, S_{ii}, S_{jj} ont, sur ce feuillet, la propriété de factorisation :	propriétés de factorisation simultanément réalisées :
$q_j \geqslant 2q_o$	$q_i+q_j-2q_o \geqslant 0$ (zéro)	0	$P_{ij}^2 = P_i.P_j + \mathcal{O}(s^{\varkappa})$ et $S_{ij}^2 = S_{ii}.S_{jj} + \mathcal{O}(s^{q_{ij}-q_o})$	(1 et 4)
$+q_j < 2q_o$	$2q_o-q_i-q_j > 0$ (pôle)	0	$P_{ij}^2 = P_i.P_j + \mathcal{O}(s^{\varkappa})$	(2 et 3) ou (2 et 1)
$+q_j \geqslant 2q_{ij}$	$q_i+q_j-2q_{ij} \geqslant 0$ (zéro)	i + j	$P_{ij}^2 = P_i.P_j + \mathcal{O}(s^{\varkappa})$ et $S_{ij}^2 = S_{ii}.S_{jj} + (s^{q_o-q_{ij}})$	(2 et 3)
$+q_j < 2q_{ij}$	$2q_{ij}-q_i-q_i > 0$ (pôle)	i + j	$P_{ij}^2 = P_i\,P_j + \mathcal{O}(s^{\varkappa})$	(1 et 4) ou (2 et 4)

Tableau I - $\varkappa > 0$

4 - De même que nous avons examiné les propriétés de factorisation locale pour les déterminations 0 et i + j de la matrice S_{ij}, nous pouvons en faire autant pour les déterminations (uniformes) sur les feuillets i et j. Les quantités (24.3) et (30) deviennent :

- sur le feuillet i : $2q_i-q_o-q_{ij}$ et q_j-q_i
- sur le feuillet j : $2q_j-q_o-q_{ij}$ et q_i-q_j .

La quantité $\varkappa$ change de signe puisqu'elle est antisymétrique dans ce changement de feuillet. La discussion déjà menée peut encore être répétée, mais les seuls cas de factorisation possibles ne peuvent être réalisés que si :

$$\varkappa = q_o + q_{ij} - q_i - q_j < 0 .$$

Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau II ($\varkappa < 0$).

Nature et numéro du cas	S_{ij}^2 a un pôle zéro d'ordre	sur le feuillet n°	S_{ij}^2, S_{ii} et S_{jj} ont, sur ce feuillet la propriété de factorisation	propriétés de factorisation simultanément réalisées.
$q_o+q_{ij} \geqslant 2q_i$	$q_o+q_{ij}-2q_i \geqslant 0$ (zéro)	i	$P_{ij}^2 = P_{ii}P_{jj} + \mathcal{O}(s^{-\varkappa})$ et $S_{ij}^2 = S_{ii}S_{jj} + \mathcal{O}(s^{q_j-q_i})$	(1 et 4)
$q_o+q_{ij} < 2q_i$	$-q_o-q_{ij}+2q_i > 0$ (pôle)	i	$P_{ij}^2 = P_{ii}P_{jj} + \mathcal{O}(s^{-\varkappa})$	(2 et 3) ou (2 et 4)
$q_o+q_{ij} \geqslant 2q_j$	$q_o+q_{ij}-2q_j \geqslant 0$ (zéro)	j	$P_{ij}^2 = P_iP_j + \mathcal{O}(s^{-\varkappa})$ et $S_{ij}^2 = S_{ii}S_{jj} + \mathcal{O}(s^{q_i-q_j})$	(2 et 3)
$q_o+q_{ij} < 2q_j$	$2q_j-q_o-q_{ij} > 0$ (pôle)	j	$P_{ij}^2 = P_iP_j + \mathcal{O}(s^{-\varkappa})$	(1 et 4) ou (2 et 4)

Tableau II - $\varkappa < 0$

Ainsi, le seul cas où il ne peut pas y avoir de factorisation pour la détermination de $S_{\{i,j\}}$ sur l'un des feuillets :

0 , i , j , i+j ,

est obtenu si :

$$\varkappa = q_0 + q_{ij} - q_i - q_j = 0 \ . \qquad (31)$$

La valeur de $\varkappa$ est donc fondamentale et constitue en quelque sorte un indicateur de la "régularité" de $S_{\{i,j\}}$ en un point s de la surface de Riemann.

L'ensemble de ces résultats se résume dans le théorème suivant:

II.3 - Théorème de factorisation locale (théorème IV.6)

On définit la quantité :

$$\varkappa = q_0 + q_{ij} - q_i - q_j$$

1 - Si $\varkappa > 0$, on pose :

$$q_\alpha = \max [q_0 , q_{ij}] \quad , \quad q_\beta = \min [q_0 , q_{ij}]$$

S_{ij}^2 a un pôle d'ordre $r_\alpha = 2q_\alpha - q_i - q_j$ dans le feuillet α et un pôle d'ordre $r_\beta = 2q_\beta - q_i - q_j$ (qui est un zéro d'ordre $-r_\beta$ si $r_\beta < 0$) dans le feuillet β . Dans l'un et l'autre de ces feuillets, on a :

$$P_{ij}^2(s) = P_i(s) P_j(s) + \mathcal{O}(s^\varkappa)$$

2 - Si $\varkappa < 0$, on pose :

$$q_{\alpha'} = \max [q_i , q_j] \quad , \quad q_{\beta'} = \min [q_i , q_j] ,$$

S_{ij}^2 admet un pôle d'ordre $r_{\alpha'} = 2q_{\alpha'} - q_0 - q_{ij}$ dans le feuillet α' et un pôle d'ordre $r_{\beta'} = 2q_{\beta'} - q_0 - q_{ij}$ (qui est un zéro d'ordre $-r_{\beta'}$ si $r_{\beta'} < 0$) dans le feuillet β' . Sur l'un et l'autre de ces feuillets, on a

$$P_{ij}^2(s) = P_i(s) P_j(s) + \mathcal{O}(s^{-\varkappa})$$

3 - Si $\varkappa = 0$, il n'y a aucune propriété de factorisation dans aucun feuillet.

4 - Puisque S_{ij} est, par hypothèse, méromorphe sur $\mathcal{R}_n$, on a :

si $\varkappa > 0$: $q_i + q_j = 2p$

si $\varkappa < 0$: $q_0 + q_{ij} = 2p'$,

où p et p' sont deux entiers.

II.4 - Remarques.

Il convient de faire plusieurs remarques :

i) S'il existe une propriété de factorisation ($\varkappa \neq 0$) dans le feuillet λ :

$$\lambda = 0 , i , j , i+j ,$$

alors il en existe une autre au même point du feuillet λ' :

$$\lambda' = \lambda \div (i+j) \quad ,$$

et dans celui-là seulement.

ii) De l'analyse du tableau I, il résulte que si $S^2_{ij}(0)$ a un zéro (et qu'il y a factorisation) alors $S^2_{ij}(i+j)$ a nécessairement un pôle. Par contre, si $S^2_{ij}(0)$ a un pôle (et qu'il y a factorisation), il peut y avoir un pôle ou un zéro au même point du feuillet i + j. On peut évidemment dire la même chose pour $S^2_{ij}(i)$ et $S^2_{ij}(j)$, les feuillets considérés ayant les numéros i et j.

iii) Il faut observer que les propriétés de factorisation peuvent être réalisées en des pôles, des zéros ou des points réguliers ; la seule grandeur, déterminante à cet effet, est la valeur de $\varkappa$.

II.5 - Pôles simples à résidus non factorisables.

A titre d'exemple, et pour illustrer l'usage des tableaux I et II, nous allons étudier le cas où la matrice S à deux voies admet un pôle simple dans :

$$S_{11}(0) \quad , S_{22}(0) \quad , S_{12}(0) \quad ;$$

nous verrons ainsi les cas de non factorisation des résidus aux pôles simples de S.

1 - Du point de vue phénoménologique, la quantité $\varkappa$ est une grandeur mesurable (du moins en principe). En effet, il est facile de vérifier que, si les nombres :

$$\alpha_i \quad , \alpha_j \quad , \alpha_{ij} \quad \text{et} \quad \alpha_\Delta \tag{32.1}$$

sont définis par :

$$S_{ii} \sim \frac{P_i}{\Delta^{\alpha_i}} \quad , S_{jj} \sim \frac{P_j}{\Delta^{\alpha_j}} \quad , S_{ij} \sim \frac{P_{ij}}{\Delta^{\alpha_{ij}}} \quad , \Delta_{ii,jj} \sim \frac{P_\Delta}{\Delta^{\alpha_\Delta}} \quad , \tag{32.2}$$

nous avons :

$$\varkappa = 2\alpha_{ij} - \alpha_\Delta \tag{33.1}$$

avec :

$$\alpha_i + \alpha_j = 2\alpha_{ij} \qquad (33.2)$$

2 - Nous nous plaçons dans le cas de deux voies, avec un pôle simple pour chaque élément de la matrice S, donc :

$$\alpha_{12} = \alpha_1 = \alpha_2 = 1 \quad , \quad \alpha_\Delta \leq 2 \, . \qquad (34)$$

Il résulte du tableau I que la factorisation des résidus (sur le feuillet zéro) a lieu si χ est positif, donc si :

$$\alpha_1 + \alpha_2 > \alpha_\Delta$$

c'est-à-dire si le déterminant de S , $\Delta_{11,22}$, n'est pas plus singulier que s^{-1} :

$$\alpha_\Delta < 2$$

Par contre, il n'y aura pas factorisation des résidus si :

$$\alpha_\Delta \geq 2 \, . \qquad (35)$$

donc si $\Delta_{11,22}$ est aussi singulier que s^{-2} . Une analyse élémentaire montre que ceci est réalisé si $S_{11}(0)$ et $S_{22}(0)$ avant un pôle simple en $s = 0$, $S_{11}(3)$ et $S_{22}(3)$ ont un zéro simple au même point.

En terme de fonction D, la condition (35) de non factorisation aux pôles simples de S ou T prend une forme plus maléable. Si :

$$D_0 \sim s^{q_0} Q_0(s) \, , \; D_i \sim s^{q_0 - 1} Q_i(s) \, , \; i = 1,2 \, ,$$

la condition (35) est réalisée dès que(*) :

$$D_3 \sim s^{q_0 - b} Q_3(s) \, , \quad b \geq 2 \qquad (35')$$

(*) Dans notre cas, fixé par (34), on aurait b = 2.

Si on choisit (et cela ne diminue en rien la généralité du problème) $q_0 = 1$, l'absence de factorisation se produit quand D_3 admet un pôle où D_0 admet un zéro.

On définit classiquement une particule comme un pôle à résidu factorisable ; ceci permet de faire correspondre r particules différentes situées à la même énergie, à un pôle simple de l'amplitude dont la matrice des résidus est de rang r. La vue des choses que nous développons ici attribue ce phénomène à la présence de singularités dans les feuillets non physiques. Ces deux points de vue ne se contredisent pas et le premier donne au second une interprétation physique.

II.6 - Extension des résultats à la matrice K.

En vertu des résultats du chapitre II, nous avons :

$$\Delta_L(K) = B_\lambda / B_0 \quad , \forall L \in \mathcal{P}(N)$$

où les fonctions B_λ sont uniformes dans le plan complexe de s coupé aux singularités de gauche. Compte tenu de ce que :

$$D_\mu = \sum_{L \in \mathcal{P}(N)} (-)^{\mathrm{card}(L \cap M)} \rho_L (-i)^\ell B_\lambda(s) \quad , \forall M \in \mathcal{P}(N) ,$$

et de la remarque sur l'holomorphie de D, il suit que nous pouvons choisir les fonctions B_λ (s) comme des fonctions holomorphes dans le plan s coupé à gauche.

Dans ces conditions, et si on fait la transposition :

$$\begin{cases} S \text{ (ou } T) \longrightarrow K \\ D_\lambda \longrightarrow B_\lambda \qquad \forall L \in \mathcal{P}(N) \end{cases} ,$$

l'ensemble des résultats du paragraphe I reste vrai pour la matrice K. Les résultats du paragraphe II ne peuvent subsister intégralement (on ne peut avoir de résultats sur les feuillets non physiques). Mais il reste l'ensemble des propriétés suivantes :

Théorème IV.7 (Factorisation locale de la matrice K).

Posons :

$$B_\lambda \underset{s \to 0}{\sim} s^{r_\lambda} \, q_\lambda(s) \qquad \lambda = 0, i, j, i+j ,$$

où les fonctions Q sont des constantes non nulles pour s = 0.

On a, au voisinage du même point :

$$K_{ii} \sim \frac{P_i(s)}{s^{r_0 - r_i}} \quad , \quad K_{jj} \sim \frac{P_j(s)}{s^{r_0 - r_j}} \quad , \quad \Delta_{ij,ij}(K) \sim \frac{P_\Delta(s)}{s^{r_0 - r_{ij}}}$$

On définit τ :

$$\tau = r_0 + r_{ij} - r_i - r_j \quad .$$

Si $\tau > 0$:

1 - Si $p = r_i + r_j - 2r_0 \geq 0$, K_{ij}^2 admet un zéro de cet ordre et on a :

$$K_{ij}^2 = K_{ii} K_{jj} + \vartheta (\Delta^{r_{ij} - r_0})$$

ou, en posant :

$$K_{ij}^2 \sim \Delta^p P_{ij}^2 ,$$

$$P_{ij}^2 = P_i P_j + \vartheta(\Delta^\tau)$$

2 - Si $p' = 2r_0 - r_i - r_j > 0$, K_{ij}^2 admet un pôle de cet ordre :

$$K_{ij}^2 \sim P_{ij}^2 / \Delta^{p'}$$

et on a :

$$P_{ij}^2 = P_i P_j + \vartheta(\Delta^\tau)$$

3 - Si $\tau \leq 0$, il n'y a aucune propriété de factorisation de $K_{ij,kl}$ au voisinage de s = 0.

III - RELATIONS ENTRE DETERMINATIONS DE D SUR LA REGION PHYSIQUE.

On notera :

$$I_\pi \quad , \quad \forall P \in \mathcal{P}_P(N) \qquad (P \neq \phi),$$

l'intervalle de la région physique séparant le seuil de plus haute énergie de P du seuil de plus basse énergie de :

$$N-P \quad ,$$

(si N-P est vide, on remplace le seuil par le point à l'infini).

Ainsi :

$$I_\pi \equiv] \Delta_{2P-1} , \Delta_{2P} [$$

Nous allons démontrer la relation de conjugaison :

$$\forall M \in \mathcal{P}(N) , \forall P \in \mathcal{P}_P(N) : \quad D_\mu = D^*_{\pi \div \mu} \quad , \forall s \in I_\pi . \quad (36)$$

Démonstration :

On sait que :

$$D_\mu = \sum_{L \in \mathcal{P}(N)} (-)^{\mathrm{Card}(L \cap M)} (-i)^{\ell} k_L B_\lambda \quad , \forall M \in \mathcal{P}(N) \tag{37.1}$$

donc :

$$D_{\pi \div \mu} = \sum_{L \in \mathcal{P}(N)} (-)^{\mathrm{Card}[L \cap (M \div P)]} (-i)^{\ell} k_L B_\lambda \quad , \forall M \in \mathcal{P}(N) \tag{37.2}$$

qui est vraie pour tout P, donc a fortiori pour :

$$P \in \mathcal{P}_P(N) \quad .$$

Or, à un nombre pair près :

$$\mathrm{Card}\left[L \cap (M \div P)\right] = \mathrm{Card}\,(L \cap M) + \mathrm{Card}\,(L \cap P) \quad ;$$

par suite (37.2) s'écrit :

$$D_{\pi \div \mu} = \sum_{L \in \mathcal{P}(N)} (-)^{\mathrm{Card}(L \cap M)} (-i)^{\ell} B_\lambda k_L (-)^{\mathrm{Card}(L \cap P)}$$

et aussi :

$$D_{\pi \div \mu} = \sum_{\substack{L \in \mathcal{P}(N) \\ \mathrm{Card}(L \cap P) = 2p}} (-)^{\mathrm{Card}(L \cap M)} (-i)^{\ell} B_\lambda k_L - \sum_{\substack{L \in \mathcal{P}(N) \\ \mathrm{Card}(L \cap P) = 2p+1}} (-)^{\mathrm{Card}(L \cap M)} (-i)^{\ell} k_L B_\lambda \; . \tag{37.3}$$

Mais si $\Delta \in I_\pi$, on a :

$$k_i \in \mathbb{R} \quad \text{si} \quad i \in P \quad \text{et} \quad k_i \in i\mathbb{R} \quad \text{si} \quad i \notin P.$$

Comme de plus, on peut toujours écrire :

$$D_\mu = \sum_{\substack{L \in \mathcal{P}(N) \\ \mathrm{Card}(L \cap P) = 2p}} (-)^{\mathrm{Card}(L \cap M)} (-i)^{\ell} k_L B_\lambda + \sum_{\substack{L \in \mathcal{P}(N) \\ \mathrm{Card}(L \cap P) = 2p+1}} (-)^{\mathrm{Card}(L \cap M)} (-i)^{\ell} k_L B_\lambda , \tag{37.4}$$

il est facile de voir que, dans (37.3)et dans (37.4), la première somme est réelle sur I_π et la seconde y est imaginaire pure. Ceci démontre la relation (36).

Définissons, pour simplifier,la notation suivante :

$$\widehat{D}_\mu \equiv \mathrm{Arg}\ D_\mu \quad ,$$

Mod D_μ désignant le module de D_μ. On peut séparer la relation (36) en module et phase :

$$\begin{cases} \widehat{D}_\mu = -\widehat{D}_{\pi\div\mu} \quad , \quad \text{Mod } D_\mu = \text{Mod } D_{\pi\div\mu} \\ \forall s \in I_\pi \quad , \quad \forall M \in \mathcal{P}(N) \quad , \quad \forall P \in \mathcal{P}_p(N) \quad , \end{cases} \tag{38}$$

IV - LE THEOREME D'INTERACTION DANS L'ETAT FINAL.

Cette propriété de la matrice S à deux voies, s'exprime par l'écriture suivante[9] de la matrice S :

$$S = \begin{pmatrix} \rho\, e^{2i\delta_1} & i\sqrt{1-\rho^2}\, e^{i(\delta_1+\delta_2)} \\ i\sqrt{1-\rho^2}\, e^{i(\delta_1+\delta_2)} & \rho\, e^{2i\delta_2} \end{pmatrix} \quad , \tag{39}$$

où $\rho \leq 1$, δ_1 et δ_2 sont trois fonctions de l'énergie, réelles sur la région physique pour $s \geq s_2$. L'expression (39) de la matrice S résume toutes les propriétés de la relation d'unitarité à deux voies :

$$S(s)\, S^+(s) = 1$$

Elle explicite aussi plusieurs faits :

i) l'égalité des élasticités des amplitudes T_{11} et T_{22},

ii) la relation entre les phases de S_{11}, S_{22} et S_{12} :

$$\widehat{S}_{12} = \delta_1 + \delta_2 = \frac{1}{2}\left(\widehat{S}_{11} + \widehat{S}_{22}\right)$$

On peut donner à l'expression (39) une forme déterminantale qui s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Mod } S_{11} = \text{Mod } S_{22} \quad ; \quad \text{Mod } \Delta = 1 \\ \pi + \widehat{S}_{11} + \widehat{S}_{22} = 2\,\widehat{S}_{12} \quad \text{ou} \quad \widehat{\Delta} = \widehat{S}_{11} + \widehat{S}_{22} \quad ; \end{cases} \tag{40}$$

on va voir que la généralisation à n voies du théorème d'interaction dans l'état final a la structure déterminantale (40) plutôt que la formulation matricielle (39).

IV.1 - Relations entre modules.

De la relation :

$$\begin{cases} \text{Mod } D_{\mu} = \text{Mod } D_{\pi \div \mu} \\ (\lambda \in I_{\pi} \ , \ M \in \mathcal{P}(N) \quad \text{et} \quad P \in \mathcal{P}_p(N)) \end{cases} , \tag{38}$$

on tire, en particulier :

$$\text{Mod } D_{o} = \text{Mod } D_{\pi} \qquad \lambda \in I_{\pi} \ , \ \forall P \in \mathcal{P}_p(N)$$

et, puisque :

$$\Delta_L(o) = \frac{D_{\lambda}}{D_o} \qquad \forall L \in \mathcal{P}(N) \ ,$$

on a évidemment :

$$\begin{cases} \text{Mod } \Delta_P^{(\omega)} = 1 \quad ; \quad \text{Mod } \Delta_M(o) = \text{Mod } \Delta_{P \div M}(o) \\ \forall s \in I_{\pi} \ , \ M \in \mathcal{P}(N) \ , \ P \in \mathcal{P}_p(N) \end{cases} . \tag{41}$$

La relation (41) est bien la généralisation de la relation (40), en ce qui concerne les relations entre modules. Il doit être remarqué que, seulement dans le cas de deux voies, la relation (41) lie les éléments de la matrice S ; en général, il n'y a de relation simple qu'entre sous-déterminants diagonaux de S.

De ce procédé de démonstration et du formalisme D/D, il suit que des relations du type (41) peuvent être écrites sur n'importe quel feuillet de $\mathcal{R}_n$. Enfin, notons que l'unitarité étendue implique :

$$\text{Mod } \Delta_M(\mu) = \left[\text{Mod } \Delta_M(o)\right]^{-1}$$

IV.2 - Relations entre les phases.

La relation (38) donne :

$$\widehat{D_{\mu}} = -\widehat{D_{\pi \div \mu}} \qquad \lambda \in I_{\pi} \ , \ M \in \mathcal{P}(N) \quad \text{et} \quad P \in \mathcal{P}_p(N) \ ,$$

donc aussi :

$$\widehat{D_o} = -\widehat{D_{\pi}} \qquad \lambda \in I_{\pi} \ , \ P \in \mathcal{P}_p(N) \ .$$

Or, le formalisme D/D nous dit que :

$$\hat{\Delta}_M(0) = \hat{D}_M - \hat{D}_0$$

donc :

$$\begin{cases} \hat{\Delta}_M(0) = -\hat{\Delta}_M(\pi) \\ \hat{\Delta}_M(0) + \hat{\Delta}_{M\div P}(0) = \hat{\Delta}_P(0) \\ \forall s \in I_\pi \quad , M \in \mathcal{P}(N) \quad , P \in \mathcal{P}_p(N) \end{cases} \tag{42}$$

Les relations (42) sont aussi la généralisation de la relation entre les phases figurant dans (40). Nous avons donc le résultat suivant :

IV.3 - Théorème IV.8 (Théorème d'interaction dans l'état final).

Soit un processus à n voies de deux corps. La vérification de l'unitarité étendue sur tous les feuillets, implique :

$$\forall M \in \mathcal{P}(N) \quad , P \in \mathcal{P}_p(N) \quad , s \in I_\pi =]s_{2p-1}, s_{2p}[$$

i) . $\text{Mod}\ \Delta_P(0) = 1 \quad , \quad \hat{\Delta}_P(0) = -2\hat{D}_0$
   . $\text{Mod}\ \Delta_M(0) = \text{Mod}\ \Delta_{P\div M}(0)$

ii) . $\hat{\Delta}_M(0) = -\hat{\Delta}_M(\pi)$
   . $\hat{\Delta}_M(0) + \hat{\Delta}_{P\div M}(0) = \hat{\Delta}_P(0)$

Il faut remarquer que ces résultats donnent des règles de somme sur les phases à énergie finie et des relations qui ne sont pas asymptotiques.

IV.4 - Conséquence spécifique du formalisme D/D.

Nous avons montré en appendice Eque :

$$\Delta_L(\mu) = \frac{\Delta_{M-L}(0)}{\Delta_M(0)} \quad , \tag{43.1}$$

qui, si l'unitarité étendue est vérifiée, ne suppose que :

$$M \in \mathcal{P}(N) \qquad \text{et} \qquad L \in \mathcal{P}(M) \ .$$

Du formalisme D/D on déduit la relation, beaucoup plus forte :

$$\Delta_L(\rho) = \frac{\Delta_{R\div L}(0)}{\Delta_R(0)} \qquad \forall L, R \in \mathcal{P}(N) \quad . \tag{43.1}$$

La relation (43.1) donne les relations entre phases du paragraphe IV.3 ; la relation (43.2) montre, quant à elle, que :

$$\hat{\Delta}_L(\rho) + \hat{\Delta}_R(0) = \Delta_{R\div L}(0) \quad . \tag{44}$$

Ainsi la phase d'un déterminant sur les feuillets non physiques est déterminée par celle des déterminants sur le feuillet physique.

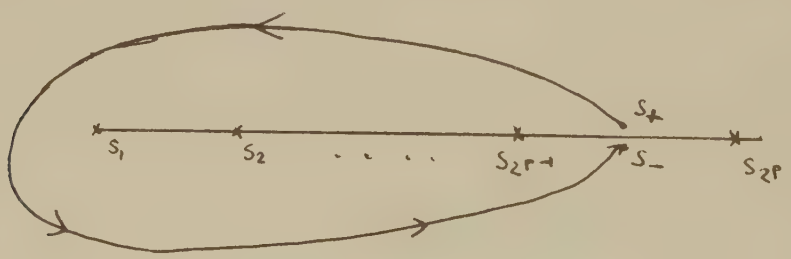
IV.5 - Relations de phases du problème à 3 voies.

Entre les second et troisième seuils, le théorème d'interaction dans l'état final conduit à :

$$\hat{S}_{11}(0) + \hat{\Delta}_{24}(0) = \hat{S}_{22}(0) + \hat{\Delta}_{14}(0) = \hat{S}_{44} + \hat{\Delta}_{12}(0) = \hat{\Delta}_{124}(0) \, .$$

V - VARIATIONS DE PHASE DE D_o SUR LA REGION PHYSIQUE.

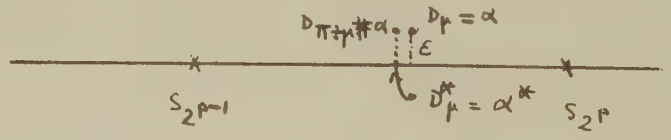
Nous allons nous intéresser à la variation de la phase de D. Sur des parcours tels que celui figuré ci-après :



En appliquant le principe de réflexion de Schwarz[10], et en utilisant la relation (38), on trouve :

$$D_\mu^*(s \pm i\varepsilon) = D_\mu(s \mp i\varepsilon) \; \# \; D_{\pi\div\mu}(s \pm i\varepsilon) \qquad , s \in I_\pi \; ,$$

qui est visualisée dans la figure suivante :



La relation entre les phases pour $s \in I_\pi$ peut donc être écrite :

$$s \in I_\pi \; : \; \hat{D}_\mu (s \mp i\varepsilon) = - \hat{D}_\mu (s \pm i\varepsilon) = - \hat{D}_{\pi - \mu} (s \pm i\varepsilon) \qquad (15)$$

Cette relation va nous servir de fondement pour établir la formule donnant la variation de la phase de D_o entre s_+ et s_-. Pour simplifier l'écriture, nous allons d'abord définir des fonctions introduites par W-arnock pour établir le théorème de Levinson à plusieurs voies[11].

V.1 - Les fonctions de Warnock.

Les intervalles I_π étant définis par :

$$I_\pi = \;] s_{2p-1} , s_{2p} [\quad ,$$

on appellera fonction de Warnock à l'ordre N, la fonction $\psi_N(o)$ définie par :

$$\psi_N(o) = \begin{cases} \psi_\pi(o) = 1 & si \quad s < s_1 \\ \psi_\pi(o) = \Delta_p(o) & si \quad s \in I_\pi \end{cases} \qquad (16)$$

Les fonctions ψ_π vérifient :

$$\psi_\pi(o) \, \psi_\pi(\pi) = 1 \qquad s \in I_\pi \; ,$$

si on pose :

$$\begin{cases} \psi_{\pi'}(\pi) = 1 & si \quad s < s_1 \\ \psi_{\pi'}(\pi) = \Delta_{p'}(\pi) & si \quad s \in I_\pi \end{cases} \qquad (p' \in \mathcal{P}_p(N)) \; ,$$

Comme $\psi_\pi(o)$ n'est pas une fonction analytique, $\psi_\pi(\pi)$ n'est pas son prolongement analytique.

Par un raisonnement analogue à celui qui nous a permis d'établir les relations générales d'unitarité physique (théorème III.1) on peut montrer que :

$$\prod_{M \in \mathcal{P}(N)} \psi_N(\mu) = 1 \qquad s \in \;] s_{2n-1}, \infty [$$

et que :

$$\prod_{M \in \mathcal{P}(p)} \psi_p(\mu) = 1 \qquad \forall s \in I_\pi \; .$$

Dans la suite on notera par $\phi_\pi(0)$ la phase de $\Psi_\pi(0)$:

$$\phi_N(0) \equiv \hat{\Psi}_N(0) \tag{47}$$

V.2 - Variations de phase de D_o à droite.

En utilisant (45), (47) et le formalisme D/D, nous allons trouver une expression des variations de phases de D_o à droite. Avec :

$$\Delta_\pm = \Delta \pm i\varepsilon \qquad (\Delta \in \mathbb{R}\ ,\ \Delta > \Delta_1)\ ,$$

et en supposant que s_1 n'est ni un zéro, ni un pôle de D_o, nous avons :

$$\hat{D}_o(s)\Big|_{\Delta_+}^{\Delta_-} = \hat{D}_o(s)\Big|_{\Delta_+}^{\Delta_1} + \hat{D}_o(s)\Big|_{\Delta_1}^{\Delta_-}\ ,$$

qu'on peut écrire :

$$\hat{D}_o(s)\Big|_{\Delta_+}^{\Delta_-} = \hat{D}_o(s+i\varepsilon)\Big|_{\Delta^*}^{\Delta_1} + \hat{D}_o(\Delta - i\varepsilon)\Big|_{\Delta_1}^{\Delta} \tag{48}$$

En portant la relation (45) dans (48) et en utilisant le formalisme D/D, on trouve :

$$\hat{D}_o(s)\Big|_{\Delta_+}^{\Delta_-} = \hat{S}_{11}(0)\Big|_{\Delta_1}^{\Delta_2} + \hat{\Delta}_{12}(0)\Big|_{\Delta_2}^{\Delta_4} + \ldots + \hat{\Delta}_p(0)\Big|_{\Delta_{2p-1}}^{\Delta} \tag{49}$$

si $\Delta \in I_\pi$. Donc, la variation de phase de D_o entre le seuil s_1 et une énergie (finie ou infinie) donnée, s'exprime à l'aide des seuls déterminants physiques de la matrice S.

En utilisant (46) et la définition (47), l'expression (49) devient :

$$\hat{D}_o(s)\Big|_{\Delta_+}^{\Delta_-} = \phi_N(0)\Big|_{\Delta_1}^{\Delta_+} \tag{50}$$

Mais, l'analyticité réelle de D nous donne :

$$\hat{D}_\mu(s)\Big|_{\Delta_1}^{\Delta_+} = -\hat{D}_\mu(s)\Big|_{\Delta_1}^{\Delta_-} \qquad \forall \mu \in \mathcal{P}(N)\ .$$

En portant ceci dans (50) on obtient :

$$\widehat{D}_o(s)\Big|_{s_1}^{s_+} = -\frac{1}{2}\,\phi_N(o)\Big|_{s_1}^{s_+} \quad , \tag{51}$$

qui donne l'expression de la variation de la phase de D_o entre s_1 et tout point d'énergie s.

Au lieu de partir de D_o, on aurait pu partir de n'importe quelle fonction D_μ ; on aurait obtenu :

$$\widehat{D}_\mu(s)\Big|_{s_1}^{s_+} = -\frac{1}{2}\,\phi_N(\mu)\Big|_{s_1}^{s_+} \tag{52}$$

De (51) et (52) on tire alors :

$$\widehat{\Delta}_M(o)\Big|_{s_1}^{s_+} = -\frac{1}{2}\left[\phi_N(\mu) - \phi_N(o)\right]_{s_1}^{s_+} \quad . \tag{53}$$

Si on note par δ la phase de D_o sur la région physique, l'expression (50) donne :

$$\delta(s) - \delta(s_1) = -\frac{1}{2}\,\phi_N(o)\Big]_{s_1}^{s_+} \quad . \tag{54}$$

A ce stade, l'expression (54) ne peut conduire au théorème de Levinson[11] ; il nous faudrait, pour cela, introduire de nouvelles hypothèses sur le mouvement des zéros de D_o lorsqu'on établit l'interaction[12].

I - CONCLUSIONS.

En utilisant le formalisme D/D, nous avons pu montrer l'existence de propriétés locales de factorisation de la matrice S. Sous certaines hypothèses restrictives (sur la relation entre pôles de S et zéros de D), nous avons pu voir qu'il y a factorisation du polynôme numérateur de la partie principale de la matrice S au voisinage de ses pôles. Sous ces hypothèses, on montrait que la matrice de ces polynômes numérateurs était de rang 1 à l'ordre q_o près.

En nous plaçant dans le cas le plus général, nous n'avons pas pu obtenir des renseignements aussi précis sur le rang des matrices (localement), mais il nous a été possible de montrer qu'il existait des conditions générales

pour la factorisation locale de la matrice $S_{\{i,j\}}$, ou pour la partie principale (au voisinage d'un pôle). Il est ainsi apparu que :

i) Les propriétés de factorisation sont liées à l'existence de pôles de S dans l'un quelconque des feuillets:

o, i, j , i + j ,

et pas nécessairement dans le seul feuillet physique.

ii) Il peut ainsi y avoir factorisation locale de la détermination principale de la matrice $S_{\{i,j\}}(\forall i,j \in N)$ au voisinage d'un pôle, d'un zéro ou de n'importe quel point régulier.

iii) La grandeur qui détermine l'existence de la factorisation est :

$$\varkappa = q_o + q_{ij} - q_i - q_j \ .$$

Ainsi, on démontre qu'il y a factorisation de $S_{\{i,j\}}$ localement, dès que $\varkappa \neq 0$ et ceci pour un <u>couple</u> de ses déterminations : 0 et i + j (si $\varkappa > 0$ i et j (si $\varkappa < 0$).

L'analogie des formalismes D/D et B/B nous a permis d'étendre une partie de ces résultats à la matrice K.

En utilisant l'existence d'une relation de conjugaison sur la région physique pour les différentes déterminations de D, nous avons démontré :

i) une extension (déterminantale) du théorème d'interaction dans l'état final pour le cas de $n(\geq 2)$ voies. On a pu voir que les relations ne sont simples si $n > 2$, que pour les <u>déterminants diagonaux</u> de S et non pour les <u>éléments</u> de cette matrice.

ii) qu'il existe une expression très simple de la variation de la phase de D_o sur des portions quelconques (finies ou infinies) de la région physique.

C H A P I T R E V

-:-:-:-:-:-:-:-:-

SUR LES PHENOMENES D'INDETERMINATION EN THEORIE DES COLLISIONS A PLUSIEURS VOIES

-:-

L'étude des collisions à plusieurs voies conduit à des difficultés de plusieurs ordres. Certaines tiennent à l'état même des connaissances théoriques, d'autres proviennent de la description phénoménologique des données, d'autres, enfin, sont dûes à ce qu'on ne peut disposer de mesures dans toutes les voies d'un même processus. Tout ceci conduit à des indéterminations inévitables dans la valeur -quand ce n'est pas dans la définition- des paramètres physiques. Après avoir passé en revue des sources possibles d'indétermination, nous approfondirons l'une d'entre elle, l'indétermination expérimentale que nous allons définir. Nous verrons alors sur l'exemple de l'onde S_{11} de πN l'ampleur des conséquences du fait qu'on ne dispose pas de mesures dans toutes les voies.

I - SOURCES D'INDÉTERMINATION.

En théorie des collisions à plusieurs voies, les causes d'indétermination des paramètres physiques sont de plusieurs ordres.

1°/ - Causes théoriques d'indétermination.

A titre d'exemple, nous avons déjà vu aux chapitres I et II qu'on avait à choisir entre unitarité physique et unitarité étendue. Les raisons qui font trancher en faveur de la seconde hypothèse sont, en dernière analyse, surtout d'ordre historique et esthétique.

La définition même des paramètres physiques conduit à une autre source d'indétermination. Suivant les processus étudiés et, parfois, dans un même processus, les définitions[1] (masse, constantes de couplage) sont données par des formules analytiquement inéquivalentes[2], suivant la position de la particule observée par rapport aux différents seuils. On peut ainsi définir l'énergie d'une résonance par la partie réelle du pôle de l'amplitude ou,

comme le point où la phase passe par $\pi/2$. Ce dernier point est, en général, le pôle de la matrice K réduite (au sens de Dalitz[3]), et en particulier (problème à une voie) le pôle de la matrice K. A des facteurs inélastiques près, les constantes de couplage sont les résidus à l'un de ces pôles.

Notons enfin, qu'en général, les définition utilisées dans les problèmes à plusieurs voies sont les mêmes que dans le cas d'une seule voie, et ce n'est pas toujours bien adapté.

2°/ - Causes phénoménologiques d'indétermination.

Le choix du type de modèle utilisé pour rendre compte des données expérimentales est relativement arbitraire. D'autre part, le modèle étant fixé, on ne peut déterminer toujours de façon unique ses paramètres grâce aux mesures. Ainsi, à basse énergie, l'onde S_{01} où $\bar{K}N$ dépend de trois paramètres dans le modèle en matrice K constante[4], alors qu'on ne mesure que deux grandeurs : les parties réelle et imaginaire de la longueur de diffusion.

3°/ - Causes expérimentales d'indétermination.

Il n'est souvent pas possible, pour des questions techniques, de disposer d'informations expérimentales dans toutes les voies élastiques d'un processus à plusieurs voies. Ceci est essentiellement dû à l'impossibilité matérielle de faire des faisceaux ou cibles de particules instables ou neutres (π°, η, Λ, Σ°). C'est ce dernier type de phénomènes que nous nommons indétermination expérimentale et que nous allons étudier pour le cas de n voies de deux corps.

Les causes d'indéterminations que nous avons séparées ne sont évidemment pas indépendantes ; nous allons voir plus précisément comment la description phénoménologique d'un phénomène est influencée par ce qui n'est pas mesuré.

II - FORMULATION DU PROBLEME

II -1 Traits Généraux

Dans toute collision actuellement réalisable, on ne peut atteindre qu'une seule des voies élastiqueset les voies de désintégration autorisées par les lois de conservation. En omettant le mode $\Lambda\pi\pi$ qui est négligeable, la collision $\bar{K}N$ permet d'effectuer des mesures dans les trois voies :

$$\bar{K}N \rightarrow \begin{cases} \bar{K}N \\ \Sigma\pi \\ \Lambda\pi \end{cases} ;$$

mais des réactions telles que

$$\Lambda\pi \longrightarrow \Lambda\pi \quad ,$$

$$\Sigma\pi \longrightarrow \Sigma\pi \quad ,$$

qui entrent dans le même processus à plusieurs voies, ou aussi :

$$\eta N \longrightarrow \eta N,$$

qui est importante dans l'onde S_{11} deπN, ne peuvent être mesurées.

Dans la voie élastique mesurée, l'amplitude :

$$T_{ii} \equiv T\ (i \rightarrow i)$$

est complètement déterminée, puisqu'on mesure le module et la phase correspondants. Par contre, de l'amplitude :

$$T_{ij} \equiv T\ (i \rightarrow j) \qquad , \qquad j \neq i \ ,$$

on ne connait que le module sur la région physique qu'on déduit de la mesure de la section efficace.

Le problème qu'on se pose est alors le suivant :

- soit un modèle $\mathcal{M}$, caractérisé par sa fonction D, qui décrive exactement :

  . T_{ii} pour un i donné

  . $|T_{ij}|$ pour tout j ,

trouver tous les modèles $\mathcal{M}'$, caractérisés par leur fonction $\mathcal{D}$, qui décrivent exactement les même grandeurs.

D'un point de vue physique , il s'agit de trouver tous les modèles (i.e., toutes les fonctions D) qui décrivent la même physique observée. N'oublions pas que ce que nous appelons "fonction D" est, en fait, une classe de fonctions se déduisant les unes des autres par multiplication par une fonction uniforme de s.

II - 2 Formulation opératoire

Comme nous supposons que l'unitarité étendue est vérifiée, on se place dans le cadre du formalisme D/D. La fonction D étant donnée, les éléments de la matrice S à plusieurs voies s'expriment par :

$$S_{ii} = \frac{D_i}{D_o} \quad , \forall i \in N \quad ; \quad S_{ij} = \frac{(D_i D_j - D_o D_{i+j})^{1/2}}{D_o} \quad i \neq j \quad , i,j \in N \quad (1)$$

La détermination étudiée de la matrice S étant la détermination principale, nous omettons de préciser que le feuillet a pour numéro 0 (zéro).

En admettant que i est toujours la voie mesurée, la donnée complète de T_{ii} est équivalente à celle de S_{ii}, et celle de $|T_{ij}|$ est équivalente à la donnée de $|S_{ij}|$ puisque :

$$S = 1 + 2i\, k^{1/2}\, T\, k^{1/2} .$$

Soit à présent $\mathcal{D}$ une fonction définie - comme D - sur $\mathcal{R}_n$ (voir Ch. I). Les éléments de la matrice S correspondant à ce modèle, s'écrivent :

$$\mathcal{S}_{ii} = \frac{\mathcal{D}_i}{\mathcal{D}_o} \quad , \forall i \in N \quad ; \quad \mathcal{S}_{ij} = \frac{(\mathcal{D}_i \mathcal{D}_j - \mathcal{D}_o \mathcal{D}_{i+j})^{1/2}}{\mathcal{D}_o} \quad , i \neq j \quad , i,j \in N \quad (2)$$

Il s'agit de trouver l'ensemble des fonctions $\mathcal{D}$, tel que les deux conditions d'invariance :

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{ii} = S_{ii} & \text{pour } \underline{\text{un}} \text{ i donné} \quad , \quad (3) \\ |\mathcal{S}_{ij}| = |S_{ij}| & \text{pour tout j différent de i} \quad , \quad (4) \end{cases}$$

soient vérifiées.

II - LA PREMIERE CONDITION D'INVARIANCE

En utilisant les expressions (1) et (2), l'équation (3) s'écrit :

$$\frac{D_i}{D_o} = \frac{\mathcal{D}_i}{\mathcal{D}_o} \quad . \quad (5)$$

Introduisons la fonction d'indétermination d :

$$d = \mathcal{D} / D \quad ; \quad (6)$$

C'est une fonction sur $\mathcal{R}_n$ puisque $\mathcal{D}$ et D le sont, par hypothèse. On va voir que d est définie sur une surface plus petite ; en portant (6) dans (5) on obtient aisément :

$$d_o = d_i \quad , \quad (7)$$

qui signifie que s_i est un point régulier pour d, c'est-à-dire que cette fonction ne dépend de k_i que par son carré. Ainsi d est définie sur une surface de Riemann $\mathcal{R}_n^{(d)}$ à 2^{n-1} feuillets où :

. s_i est un point régulier ,

. les seuils de N' :

$$N' = N - \{ i \}$$

sont des points de branchement algébrique du premier ordre. En choisissant k_i pour fonction de poids, le genre de $\mathcal{R}_n^{(d)}$ est (voir Ch. I) :

$$g_d = 2^{n-3}(n-4) + 1 ,$$

alors que celui de $\mathcal{R}_n$ sur laquelle sont définie et D est :

$$g_D = g_{\mathcal{D}} = 2^{n-2}(n-3) + 1.$$

De plus, comme le formalisme D/D implique l'analyticité réelle de D et $\mathcal{D}$, il implique aussi cette propriété pour d.

- LA SECONDE CONDITION D'INVARIANCE

La relation (7) implique

$$d_\mu = d_{\mu+i} \quad , \quad \forall M \in \mathcal{P}(N) \quad , \qquad (8)$$

donc, en particulier :

$$d_j = d_{i+j} \quad , \quad \forall j \in N \quad , j \neq i \quad . \qquad (8')$$

Si on porte (1) et (2) dans (4), en utilisant (6) et (8), on trouve :

$$|d_{i+j}| = |d_o| \qquad \forall j \in N \quad , \text{ i donné} \neq j \quad , \qquad (9)$$
$$s \in \mathbb{R} \quad , s \geq \text{Max}(s_i, s_j).$$

Avec (8'), (9) conduit à :

$$|d_j| = |d_o| \qquad \forall j \in N \quad , s \geq \text{Max}(s_i, s_j) . \qquad (10)$$

En utilisant (7) et (10), on démontre en appendice H que la fonction d s'écrit sous une forme complètement factorisée et valable pour tout s complexe :

$$\begin{cases} d(k_1, \ldots, k_{i-1}, k_{i+1}, \ldots) = \prod_{j \in N'} d^{(j)}(k_j) \\ N' = N - \{i\} \end{cases} \qquad (11)$$

V - LES RELATIONS DE SURDETERMINATION

Puisque les fonctions D et $\mathcal{D}$ décrivent la physique observée, elles doivent en vérifier les conséquences théoriques, en particulier les relations de surdétermination. Nous allons voir s'il faut imposer à d des contraintes pour qu'il en soit bien ainsi.

Des relations (1), (2) et (6), on tire :

$$\mathcal{S}_{kj} = \frac{(d_j d_k)^{1/2}}{d_o} S_{kj} \quad , \forall j, k \in N. \qquad (12)$$

Définissons la matrice A diagonale et de dimension n :

$$A_{kj} = \left(\frac{d_k}{d_o}\right)^{1/2} \delta_{kj} \quad , \forall k, j \in N . \qquad (13)$$

En utilisant (13), la relation (12) conduit à l'expression matricielle :

$$\mathcal{Y} = A \,.\, S \,.\, A \qquad (14)$$

Mais, puisque A est diagonale, on a :

$$\Delta_L(\mathcal{Y}) = \Delta_L(A^2)\ \Delta_L(S) \quad , \forall L \in \mathcal{P}(N) \,. \qquad (15)$$

Dire que S vérifie les relations de surdétermination revient à écrire :

$$\forall L \in \mathcal{P}(N) \ , \ \ell \geqslant 3 \ : \quad \frac{D_\lambda}{D_0} = \mathrm{Det}(S_L) \ , \qquad (15')$$

où les éléments de la matrice S_L sont :

$$S_{ij} \quad , \forall i,j \in L \quad , L \in \mathcal{P}(N) \,.$$

D'autre part, (6) et le formalisme D/D donnent :

$$\Delta_L(\mathcal{Y}) = \frac{\mathcal{D}_\lambda}{\mathcal{D}_0} = \frac{d_\lambda}{d_0}\ \frac{D_\lambda}{D_0} \quad . \qquad (16)$$

Comme (15) implique :

$$\Delta_L(\mathcal{Y}) = \Delta_L(S).\left[\prod_{j \in L}\left(\frac{d_j}{d_0}\right)\right] \ , \qquad (17)$$

en utilisant (15'), (16) et (17) donnent :

$$\forall L \in \mathcal{P}(N) \ , \ \ell \geqslant 3 \ : \quad \frac{d_\lambda}{d_0} = \prod_{j \in L}\left(\frac{d_j}{d_0}\right) \quad . \qquad (18)$$

Si D vérifie les relations de surdétermination, $\mathcal{D}$ les vérifient également dès que d est conforme à (18). Or, puisque :

$$\frac{d_j}{d_0} = \frac{d^{(j)}(-k_j)}{d^{(j)}(k_j)} \ ,$$

et que :

$$\frac{d_\lambda}{d_0} = \prod_{j \in L}\ \frac{d^{(j)}(-k_j)}{d^{(j)}(k_j)} \ ,$$

la relation (18) se réduit à une identité. Par suite, dès que D vérifie les relations de surdétermination, toute fonction $\mathcal{D}$, qui s'en déduit par l'indétermination expérimentale, jouit de la même propriété sans aucune contrainte à introduire.

I - L'INDETERMINATION EXPERIMENTALE (Théorème V .1).

. Soit un processus à n voies où la seule voie élastique mesurée soit :

$$i \longrightarrow i \qquad \text{(i fixé).}$$

. Soient $\mathcal{D}$ et D deux fonctions analytiques réelles sur $\mathcal{R}_n$ qui décrivent la même physique observée.

On définit la fonction d'indétermination d :

$$d = \mathcal{D}/D.$$

Les déterminations principales de la matrice S dans ces deux modèles ont pour expressions :

$$S_{jj} = \frac{D_j}{D_0} \quad , \quad S_{kj} = \frac{(D_k D_j - D_0 D_{k+j})^{1/2}}{D_0} \quad ,$$

$$\mathcal{S}_{jj} = \frac{\mathcal{D}_j}{\mathcal{D}_0} \quad , \quad \mathcal{S}_{kj} = \frac{(\mathcal{D}_k \mathcal{D}_j - \mathcal{D}_0 \mathcal{D}_{k+j})^{1/2}}{\mathcal{D}_0} \quad ,$$

$$\forall\, j,k \in N \quad , \quad j \neq k.$$

L'indétermination expérimentale se traduit par l'existence des deux conditions d'invariance :

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{ii} = S_{ii} & \text{pour un i donné} \\ |\mathcal{S}_{ij}| = |S_{ij}| & \text{pour tout } j \neq i \ . \end{cases}$$

On a les propriétés suivantes :

i) d est une fonction analytique réelle pour laquelle s_i est un point régulier et les seuils de N' :

$$N' = N - \{i\}$$

sont des points de branchement algébrique du premier ordre.

ii) La fonction d factorise suivant :

$$d \equiv \prod_{j \in N'} d^{(j)}(k_j) \quad ,$$

où chaque fonction $d^{(j)}$ admet le seuil s_j comme point de branchement algébrique du premier ordre, et les autres seuils sont des points réguliers.

iii) La fonction $\mathcal{D}$ vérifie les relations de surdétermination dès que D les vérifie.

VII - CONSEQUENCES PRATIQUES DE L'INDETERMINATION EXPERIMENTALE.

VII.1 - Structure de l'élasticité non mesurée.

Sans que soit chargée la description de la physique observée, il suit de ce que nous venons de voir, que la fonction D peut être multipliée par une fonction d qui prenne en compte l'élasticité de toutes les voies non mesurées. Si un tel résultat n'était, a priori, pas inattendu, il n'était pas prévisible de trouver que d factorise.

Ce résultat curieux a une interprétation physique simple : la seule chose dont on ne tienne pas compte à cause de l'indétermination expérimentale, est l'existence de phénomènes qui sont élastiques dans chacune des voies non mesurées.

A titre d'exemple, s'il existe dans l'isospin I = 1 de $\bar{K}N$ (à basse énergie) une résonance dans l'une des voies $\Lambda\pi \to \Lambda\pi$ ou $\Sigma\pi \to \Sigma\pi$, on est sûr que cette résonance n'est pas couplée à l'autre voie !

VII.2 - Les paramétrisations en matrice K.

Pour ne pas alourdir le texte nous allons nous placer dans le cas de deux voies ; il n'y a aucune difficulté à étendre les résultats qui suivent au cas général.

La fonction D décrivant cette collision est :

$$D_0 = B_0 - i k_1 B_1 - i k_2 B_2 - k_1 k_2 B_3 \; . \qquad (19)$$

De la théorie précédente, il suit que D ne peut être distinguée de la fonction $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{D}_0 = \mathcal{B}_0 - i k_1 \mathcal{B}_1 - i k_2 \mathcal{B}_2 - k_1 k_2 \mathcal{B}_3 \quad , \tag{20}$$

obtenue en multipliant (19) par :

$$d_0 = 1 - i k_1 A_1 \quad , \tag{21}$$

si on suppose(*) que la voie mesurée est la voie 2.

Dans le cas de la fonction (19), la matrice K est définie par :

$$K_{11} = \frac{B_1}{B_0} \quad , \quad K_{22} = \frac{B_2}{B_0} \quad , \quad \Delta(K) = \frac{B_3}{B_0} \quad . \tag{22}$$

La fonction $\mathcal{D}$ donne pour matrice K :

$$\begin{cases} \mathcal{K}_{11} = \dfrac{\mathcal{B}_1}{\mathcal{B}_0} = \dfrac{B_1 - A_1 B_0}{B_0 - k_1^2 A_1 B_1} \\ \mathcal{K}_{22} = \dfrac{\mathcal{B}_2}{\mathcal{B}_0} = \dfrac{B_2 - k_1^2 A_1 B_3}{B_0 - k_1^2 A_1 B_1} \\ \Delta(\mathcal{K}) = \dfrac{\mathcal{B}_3}{\mathcal{B}_0} = \dfrac{B_3 + A_1 B_2}{B_0 - k_1^2 A_1 B_1} \end{cases} \tag{23}$$

L'indétermination expérimentale indique alors qu'il n'est pas possible de distinguer (22) de (23) par aucune expérience où on ne mesure que :

$$S_{22} \qquad \text{et} \qquad |S_{12}| \quad .$$

Comme, en fait, les fonctions uniformes analytiques réelles A_1 de (21) sont en nombre infini(**), les relations (23) représentent une <u>infinité</u> de paramétrisations en matrice K de la <u>même</u> physique observée.

(*) Cet exemple recouvre le cas de la collision $\bar{K}N$ à basse énergie pour l'isospin I = 0.

(**) Comme on ne dispose d'aucune information sur l'élément de la matrice S de la voie non mesurée, la classe des fonctions A_1 admet une infinité d'éléments.

L'intérêt de ce résultat provient de l'utilisation massive, faite actuellement, des paramétrisations en matrice K[4], notamment dans les descriptions phénoménologiques de $\bar{K}N$ à basse énergie[5]. Ce dernier processus est le champ d'application le plus immédiat de la théorie que nous venons de développer. En effet, dans la mesure où le mode $\Lambda\pi\pi$ est négligeable, jusqu'au 1815 MeV, la collision $\bar{K}N$ est un problème à 5 voies de deux corps (et même 9, si on compte les états de charge différents) :

$\Lambda\pi$	à	1255 MeV
$\Sigma\pi$	à	1330 MeV
$\bar{K}N$	à	1432 MeV
$\Lambda\eta$	à	1664 MeV
$K\Xi$	à	1815 MeV .

Jusque vers 1550 MeV, où le problème n'implique pratiquement que 3 voies, la collision $\bar{K}N$ est généralement analysée[5] avec des modèles en matrice K constante ou K^{-1} du premier degré en s[4] (voir aussi le chapitre VI). Comme la fonction A_1 dans (21) est arbitraire, il est évident qu'on peut trouver une large classe de telles fonctions, qui soient approximables par des constantes dans un domaine restreint d'énergie. Par suite, on peut s'attendre à une certaine souplesse de la physique observée vis-à-vis des descriptions phénoménologiques en matrice K, et c'est précisément ce que signalent maints auteurs (par exemple, Dalitz[3], Martin[4] et Rajasekaran[6]). L'indétermination expérimentale fournit donc une des explications de ce phénomène; elle montre aussi qu'il est inévitable.

VII.3 - Les paramètres de la diffusion.

De la théorie qui précédède, il suit que les paramètres de la diffusion vont être plus ou moins affectés par l'indétermination expérimentale suivant la définition qu'on choisit.

Ainsi :

1°/ - La longueur de diffusion dans la voie mesurée, définie comme la valeur de l'amplitude au seuil, n'est pas affectée par l'indétermination.

2°/ - Si on définit la position (complexe) de la résonance, ou de l'état lié, observé(e) comme le pôle de l'amplitude, cette position est indépendante de l'élasticité des voies non mesurées..

3°/ - La constante de couplage à la voie mesurée d'une particule observée, définie comme -ou à partir du- résidu au pôle complexe de l'amplitude, n'est pas affectée par l'indétermination expérimentale.

4°/ - Quelle que soit sa définition, la constante de couplage d'une particule observée à une voie non mesurée est toujours affectée par les phénomènes élastiques qui y existent. Si s_T est le pôle de l'amplitude, la voie non mesurée étant la voie 1, la constante de couplage à cette voie peut être multipliée par le facteur arbitraire :

$$R = \left(\frac{d_1}{d_0} \right)_{s=s_T} ,$$

qui n'est unimodulaire que sur la région physique, et non pas dans la région des résonances ou états liés.

5°/ - D'une façon générale, tous les paramètres définis par l'intermédiaire de la matrice K (ou de la matrice K réduite au sens de Dalitz[3]) sont profondément affectés par l'indétermination expérimentale.

C'est en particulier le cas des matrices-longueur de diffusion ("zéro range approximation"[4]) et des matrices portée effective ("effective range approximation"[5]).

Si la résonance est définie comme le pôle de K, sa position apparente peut varier dans de larges limites et si la constante de couplage est le résidu à ce pôle elle peut prendre toute valeur fixée d'avance.

III - EXEMPLE DE L'ONDE S_{11} DE πN.

Pour illustrer l'ensemble des conclusions du § VII.3, nous les avons appliquées au cas de l'onde S_{11} de π N, traitée comme un problème à deux voies couplées :

π N et η N.

Les données expérimentales, comme la fonctions D ("déterminée") que nous avons choisies sont celles de Uchiyama-Cambell et Logan[7]. La fonction D correspondant à leur formule de Breit-Wigner à largeurs variables (voir chap. II) dans les deux voies π N et η N, est :

$$D_0 = (s_R - s) - i k_1 \gamma_1 - i k_2 \gamma_2 \quad ; \qquad (24)$$

s_R est ici la position de la résonance au sens du pôle de K, les constantes γ_i sont reliées aux largeurs partielles de désintégration Γ_i par :

$$\sqrt{s_R} \cdot \Gamma_i = (k_i \gamma_i)_{s=s_R} \qquad i = 1,2 . \tag{25}$$

En appelant 1 la voie π N et 2 la voie η N, les éléments de la matrice amplitude sont :

$$T_{11} = \frac{\gamma_1}{D_0} \quad , \quad T_{22} = \frac{\gamma_2}{D_0} \quad , \quad T_{12} = \frac{(\gamma_1 \gamma_2)^{1/2}}{D_0} \tag{26}$$

Nous avons analysé les deux cas où dans la voie η N il y a :

i) Un état lié élastique :

$$d_0 = 1 - i k_2 \alpha_2 \tag{27.1}$$

ii) Une résonance élastique :

$$d_0 = (s'_R - s) - i k_2 \alpha_2 . \tag{27.2}$$

La fonction $\mathcal{D}$, tenant compte de cette indétermination, s'écrit :

$$\mathcal{D} = D \cdot d \quad , \tag{28}$$

et le formalisme D/D appliqué à (28) donne les "formes indéterminées" de l'amplitude.

Les variations obtenues par rapport aux paramètres fournis par Uchiyama-Campbell et Logan[7] sont représentées dans les figures de la fin de ce chapitre. Nous allons les discuter sommairement :

. La résonance observée étant définie par la position du pôle de la matrice K qui lui est associé(*), on peut voir (fig. (1)) que celui-ci peut se trouver n'importe où en s entre $-\infty$ et $+\infty$. Ceci est obtenu en introduisant un état lié élastique dans la voie η N, qui se trouve souvent assez loin pour ne simuler qu'une singularité de gauche.

(*) Ce qui revient à décrire, même dans le cas "indéterminé", la physique observée par une formule de Breit-Wigner à largeur variable.

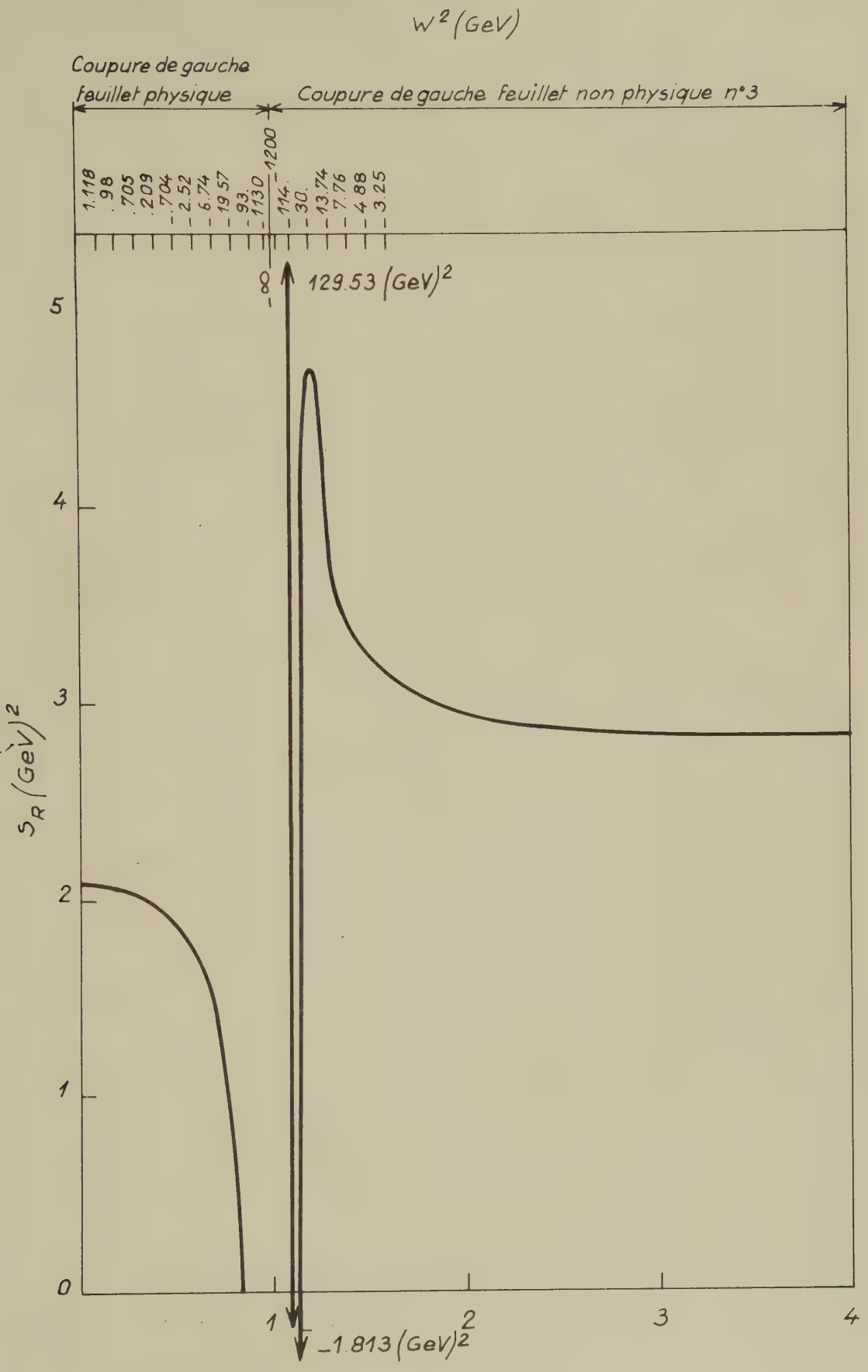
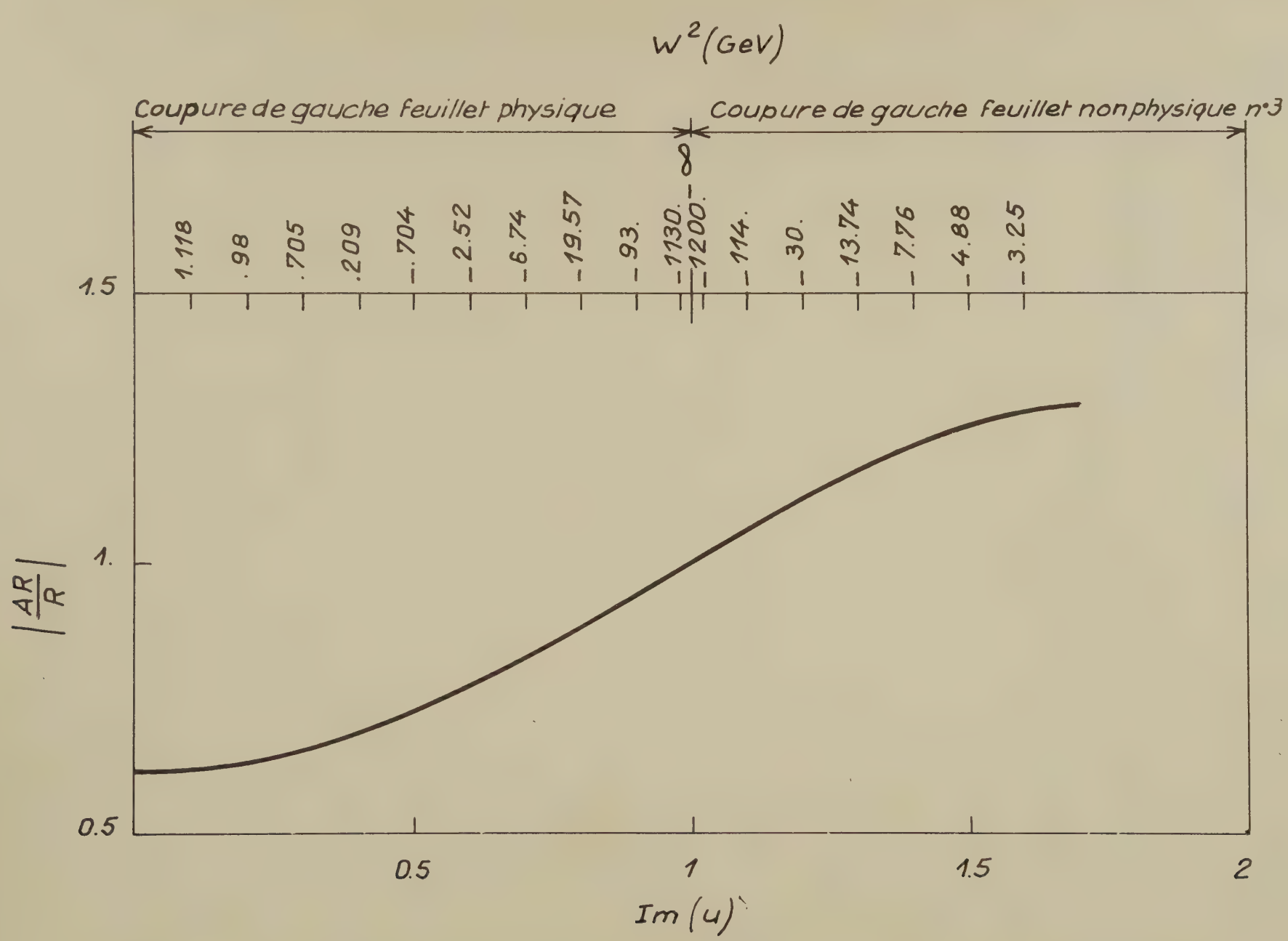

W^2 (GeV)
Coupure de gauche feuillet physique
Coupure de gauche feuillet non physique n°3
1.118
.98
.705
.209
-.704
-2.52
-6.74
-19.57
-93.
-1130
-1200
-114.
-30.
-13.74
-7.76
-4.88
-3.25
$-\infty$
129.53 (GeV)^2
S_R (GeV)^2
0
1
2
3
4
5
-1.813 (GeV)^2
Im (u)

FIG. 1


W^2(GeV)
Coupure de gauche feuillet physique
Coupure de gauche feuillet non physique n°3
1.118
.98
.705
.209
-.704
-2.52
-6.74
-19.57
-93.
-1130.
-1200.
-114.
-30.
-13.74
-7.76
-4.88
-3.25
1.5
1.
0.5
$\left|\frac{AR}{R}\right|$
0.5
1
1.5
2
Im (u)

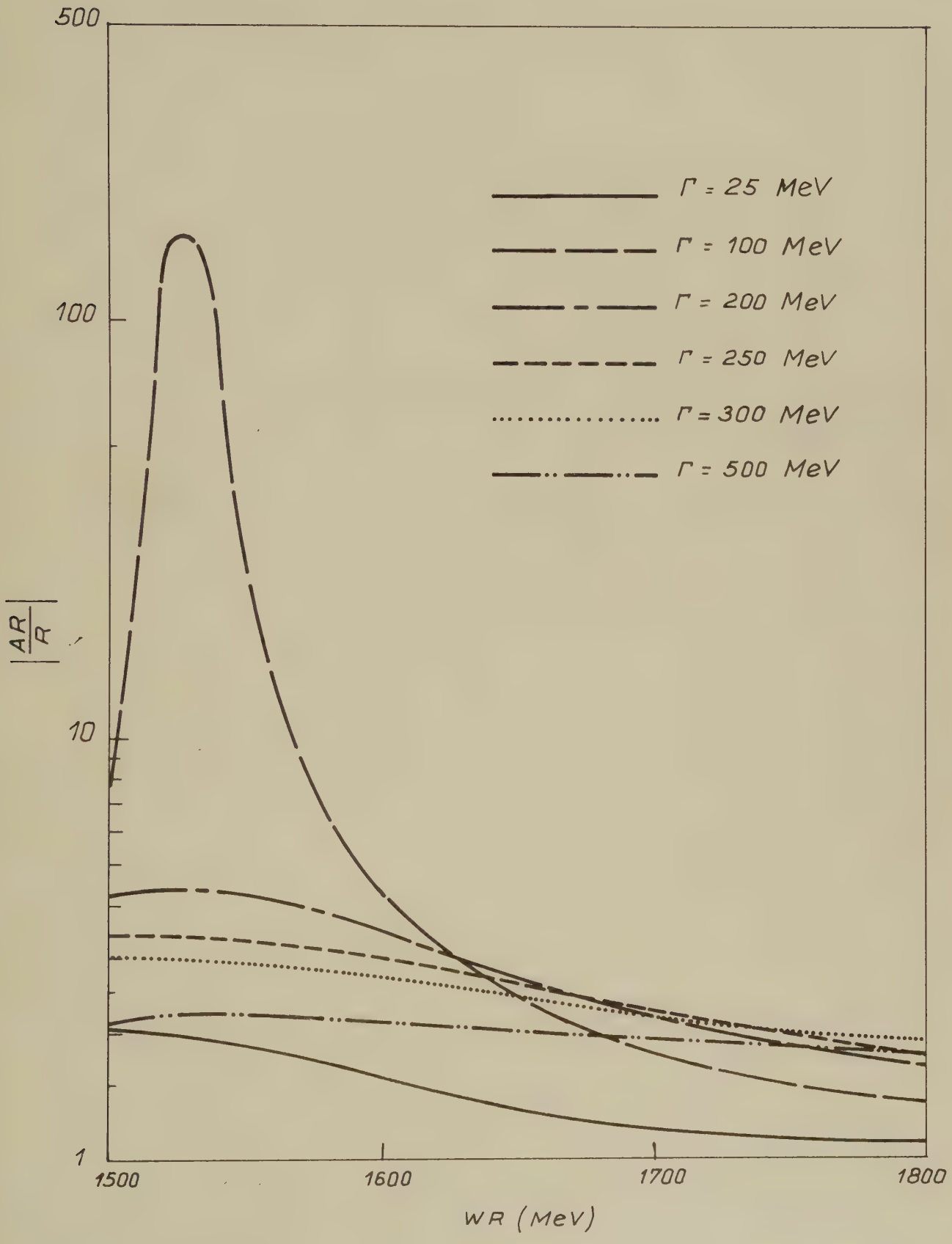

500
100
10
1
$\left|\frac{\Delta R}{R}\right|$
Γ = 25 MeV
Γ = 100 MeV
Γ = 200 MeV
Γ = 250 MeV
Γ = 300 MeV
Γ = 500 MeV
1500
1600
1700
1800
WR (MeV)

FIG.3

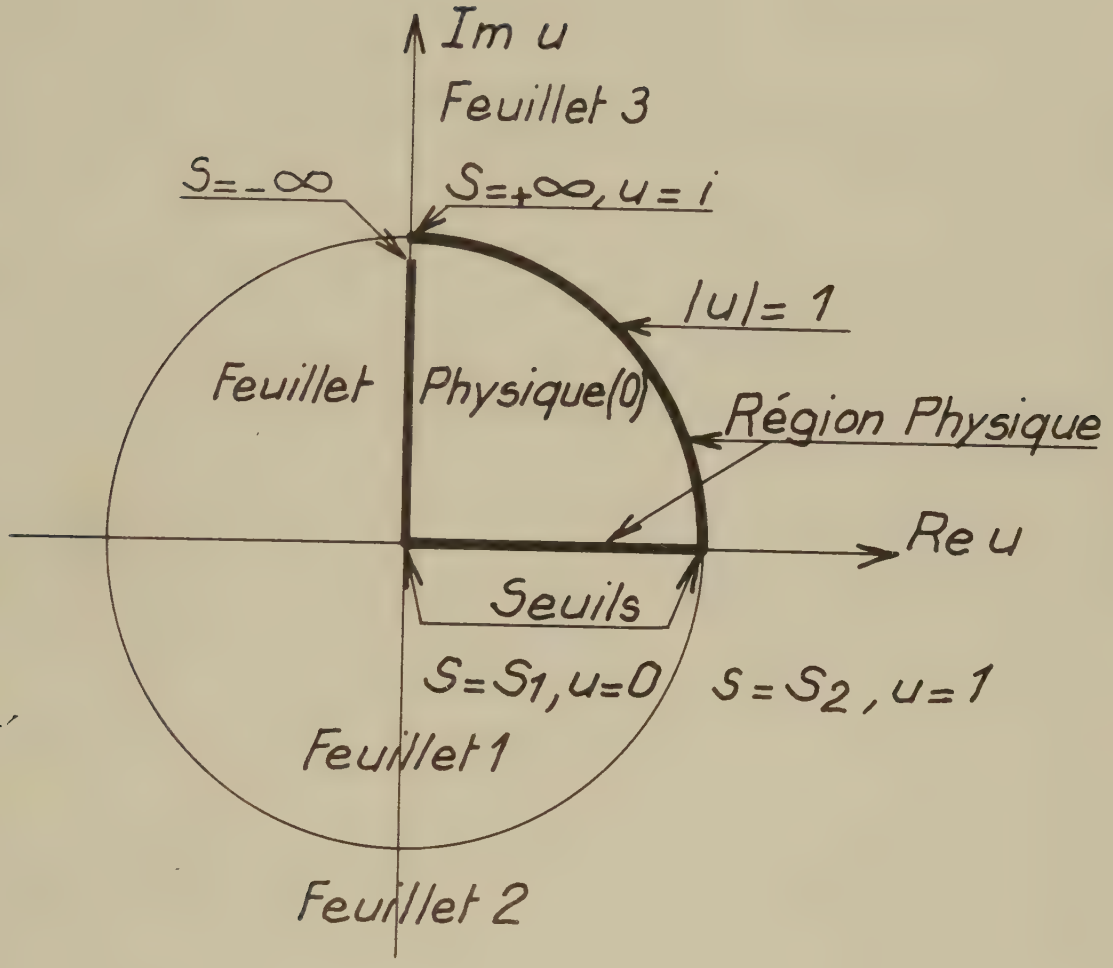

Im u
Feuillet 3
S=-∞
S=+∞, u=i
|u|=1
Feuillet
Physique(0)
Région Physique
Re u
Seuils
S=S1, u=0
S=S2, u=1
Feuillet 1
Feuillet 2

Fig. 4

. En choisissant comme définition de la constante de couplage $g^2/4\pi$ du $N^*(1520)$ à la voie η N, le module du résidu de :

$$T\ (N\eta \longrightarrow \eta N)\quad ,$$

au pôle correspondant à cette particule, les déviations obtenues sont encore importantes :

i) avec un état lié élastique dans la voie η N, le facteur multiplicatif arbitraire de la constante de couplage de Uchiyama-Campbell et Logan varie entre 0.6 et 1.5 (voir fig. (2)).

ii) avec une résonance élastique dans la voie ηN, ce facteur multiplicatif varie entre 140. et 2. (voir fig. (3)). Remarquons que, du point de vue expérimental, une résonance de 500 MeV de large n'est pratiquement discernable du fond. Par suite, même si on effectue des mesures dans toutes les voies (et dans $\eta N \longrightarrow \eta N$, en particulier), la constante de couplage est encore définie à un facteur multiplicatif près égal à 2. On peut ainsi poser autrement le problème de la violation de SU(3) par le $Y_0^*(1405)$; la constante de couplage $Y^*\Sigma\pi$, quatre fois plus grande que celle prévue par SU(3) peut être réduite de deux façons :

i) les modifications peuvent provenir de l'existence d'états liés virtuels ou résonnants élastiques dans la voie :

$$\Sigma\pi \rightarrow \Sigma\pi\quad ,$$

ii) il existe d'autres résonances observées dans l'onde d'isospin I = 0 de $\bar{K}N$ (S'_{01} (1670), S''_{01} (1870)) et des voies ouvertes vers ces énergies. Le résultat peut être modifié en introduisant tout cela dans le modèle phénoménologique.

IX - CONCLUSIONS.

De cette étude, il ressort qu'une information expérimentale incomplète conduit à d'importantes conséquences sur les valeurs des paramètres physiques.

Nous avons montré que si, comme on pouvait s'y attendre, l'élasticité des voies non mesurées était hors d'atteinte, il y avait une propriété supplémentaire : l'élasticité arbitraire des voies non mesurées ne contient pas d'états physiques couplés à plusieurs voies. Du point de vue théorique, ce résultat se traduit par la factorisation de la fonction d'indétermination d.

En analysant les conséquences pratiques de l'indétermination expérimantale, nous avons vu que nous tenions là une explication satisfaisante du problème de la "flexibilité" des paramétrisations en matrice K qu'on observe

dans la collision KN à basse énergie. Cette explication est d'autant plus probante que ce dernier processus peut être considéré comme n'impliquant que des voies à deux corps, ce qui réalise l'hypothèse la plus restrictive du formalisme D/D. Nous avons aussi vu que les valeurs des paramètres physiques pouvaient être modifiées considérablement par l'introduction de l'élasticité non mesurée. Même avec les définitions les plus adéquates, les grandeurs relatives à la voie non mesurée sont indéterminées. Il s'en suit que, par exemple, la constante de couplage $g_{Y^*\Sigma\pi}$ du $Y_o^*(1405)$ peut être multipliée par un facteur arbitraire, sans qu'on change le moins du monde la description de la physique observée.

Par ailleurs, les résultats donnés en figure (3) montrent autre chose: une résonance inséparable du fond selon les critères expérimentaux actuels peut introduire un facteur d'indétermination de l'ordre de 2 dans la valeur des constantes de couplage.

Pour conclure, on peut dire que mettre SU(3) en défaut par des résultats phénoménologiques ne peut être considéré, en l'état actuel des choses, comme rigoureusement définitif.

o

o o

C H A P I T R E VI

-:-:-:-:-:-:-:-:-

MODELES PHENOMENOLOGIQUES ET APPROXIMATION RATIONNELLE

-:-

On dispose à présent de données expérimentales nombreuses concernant des processus d'interaction forte à basse énergie qui font intervenir plusieurs voies de réaction, tels que les collisions $\bar{K}N$ par exemple. En l'absence d'une théorie satisfaisante, on se contente généralement d'une description phénoménologique de la physique observée qui, par ajustement, permet la détermination des valeurs des paramètres jugés significatifs (longueur de diffusion, portée effective, position et largeur de résonances, etc...).

La méthode utilisée pour la construction de tels modèles est simple : il s'agit d'introduire une hypothèse sur la forme de l'interaction (potentiel, matrice K, coupures de gauche de l'amplitude) qui soit compatible avec certains des principes fondamentaux (T-invariance, unitarité, causalité) exprimés sous une forme la plus simple et la plus symétrique possible (analyticité dans le feuillet physique, analyticité hermétienne, unitarité étendue).

On peut ainsi construire plusieurs classes ou modèles qu'on distingue d'après leur structure formelle(*) (ND^{-1}, D/D, matrice K, etc...).

En général, le modèle jugé le plus satisfaisant est celui qui introduit le minimum d'arbitraire (i.e. paramètres libres) pour décrire une physique donnée. Ceci ne peut cependant pas être le seul critère puisque, à nombre égal de paramètres libres, la capacité d'un modèle à décrire une réalité dépend de la forme analytique de l'amplitude correspondante, du nombre et de la position de ses singularités. Il s'en suit que toute analyse d'un phénomène dépend aussi du modèle utilisé.

(*) Ce qui n'implique évidemment pas une inéquivalence entre les types de modèles A titre d'exemple -et c'est même l'objet du chapitre II- il existe une équivalence entre le formalisme D/D et le formalisme B/B de la matrice K. (On peut expliciter également une relation entre les formalismes ND^{-1} et D/D).

Si, d'une description phénoménologique, on veut tirer des informations théoriques, il convient d'isoler au mieux tout ce qui peut dépendre du modèle choisi. Un des moyens de réaliser un tel programme consiste à comparer les descriptions des mêmes données, obtenues par des modèles différents -voire inéquivalents- de sorte que ce soit, autant que possible, la réalité qui tranche entre les différentes possibilités[1](*).

Parmi les modèles phénoménologiques, ceux reliés à la matrice K ont une place importante, dûe aux propriétés analytiques de cette matrice-fonction. On peut les grouper en deux classes suivant le type d'approximation utilisée : approximation locale, dans les modèles de Dalitz et Tuan[4], approximation rationnelle dans ceux de Ross et Shaw[5]. Dans ce chapitre, c'est à cette seconde classe, qui recouvre une partie importante des modèles utilisés pour l'analyse des collisions $\bar{K}N$ à basse énergie[5][6], que nous allons nous intéresser. Nous nous attacherons plus loin à donner un sens physique simple à ces modèles ; ici ce sont leurs propriétés analytiques qui vont nous intéresser.

Après avoir défini l'approximation rationnelle, nous procèderons à une analyse des modèles rationnels existants, en introduisant deux grandeurs significatives : la "lois de degré" et le nombre de zéros de D, que nous nommerons par concision "zérologie". Comme ces deux propriétés ne suffisent pas à caractériser complètement le modèle utilisé, on introduira une troisième grandeur significative qui est le nombre de zéros effectifs d'un modèle. Comme une étude générale de ce troisième point est difficile à construire généralement, nous nous contenterons de la faire dans le seul cas de deux voies. Nous verrons ainsi que tout modèle n'est pas susceptible de décrire une réalité donnée, et nous le montrerons en discutant le cas de l'onde S_{11} de πN, traitée comme un problème à deux voies :

$$\pi N \quad \text{et} \quad \eta N .$$

Les résultats expérimentaux les plus récents[8] semblent infirmer une telle simplicité dans la structure de l'onde S_{11}. Cela n'a évidemment pas d'influence sur notre propos dans la mesure où cet exemple simple ne nous sert qu'à comparer les conclusions obtenus à l'aide de différents modèles.

(*) Un tel procédé a des limites théoriques et pratiques ; les premières sont reliées aux phénomènes d'indétermination expérimentale (voir ch. V), les secondes, -au fait que les différentes descriptions peuvent être compatibles-. Ainsi, cette méthode a conduit à un résultat positif en ce qui concerne l'onde S_{11} de πN[2], et à des conclusions ambigües pour l'onde S_{01} de $\bar{K}N$[3].

I - L'APPROXIMATION RATIONNELLE.

I.1 - Rappels et définitions[9].

Définition 0.

On appelle ordre de branchement en un point z_o d'une surface le nombre de feuillet qui s'y rattachent diminué d'une unité.

L'ordre d'un point qui n'est pas point de branchement est donc nul, par définition.

Définition 1.

Une fonction X de la variable complexe s est dite algébrique si elle est solution d'une équation algébrique de degré fini :

$$P_n(s)\, X^n + P_{n-1}(s)\, X^{n-1} + \dots + P_0(s) = 0$$

où les coefficients $P_k(s)$ sont des polynômes en s.

Définition 2.

Une fonction algébrique X sur une surface de Riemann $\mathcal{R}$ est dite rationnelle sur $\mathcal{R}$, si ses seules singularités sont des pôles.

Sauf si ce sont aussi des pôles, les points de branchememt algébrique ne sont pas des singularités de X sur $\mathcal{R}$.

Définition 3.

L'ordre d'une fonction rationnelle en un point de $\mathcal{R}$ est l'ordre du pôle (éventuel) en ce point.

L'ordre d'un point régulier est par définition nul. Si, au voisinage de z_o, une fonction se comporte comme :

$$\frac{1}{(z - z_0)^{p/q}} \qquad (p, q \text{ entiers positifs})$$

le point z_o de $\mathcal{R}$ d'ordre de branchement q-1 est un pôle d'ordre p.

On appelle ordre (total) d'une fonction sur $\mathcal{R}$, le nombre total de ses pôles (chacun étant compté avec son ordre de multiplicité).

Théorème 1.

Le nombre total de zéros d'une fonction rationnelle sur $\mathcal{R}$ est égal à l'ordre (total) de cette fonction sur $\mathcal{R}$.

Ce théorème étend aux fonctions multiformes le résultat bien connu en ce qui concerne les fonctions uniformes. Il est fondamental dans l'étude des modèles rationnels.

I.2 - L'approximation rationnelle.

La définition la plus simple qu'on puisse en donner est en relation avec la matrice K :

On dit qu'un modèle est rationnel s'il définit une matrice K comme fonction uniforme et rationnelle de la variable complexe s. Par suite, si un modèle est rationnel la matrice K (donc l'ensemble des fonctions B_λ) n'admet comme singularités dans tout le plan complexe, que des pôles.

Il s'agit de voir la structure qu'une telle hypothèse donne à la matrice S, donc à la fonction D. Au chapitre II, nous avons vu que celle-ci pouvait être décomposée de façon standard :

$$D_\mu = \sum_{L \in \mathcal{P}(N)} (-i)^{\ell} (-)^{\mathrm{Card}(L \cap M)} k_L \, B_\lambda(s) \quad , \forall M \in \mathcal{P}(N), \quad (1)$$

où les fonctions $B_\lambda(s)$ sont uniformes dans le plan complexe, a priori coupé aux singularités de gauche. Dans le cadre de l'approximation rationnelle, il suit de (1) que la fonction D est uniforme sur la surface de Riemann $\mathcal{R}_n$ (voir ch. II) associée aux fonctions k_i :

$$k_i = (\Lambda - \Lambda_i)^{1/2} \qquad (i \in N) \qquad (2.1)$$

Dans ce chapitre, la structure de la fonction de poids joue un grand rôle et va déterminer le nombre de zéros de D qui, eux, doivent traduire la physique observée. A côté de la fonction k_i, nous allons introduire les autres fonctions de poids :

$$\begin{cases} \rho_i^{\circ} = \left(\dfrac{\Lambda - \Lambda_i}{\Lambda} \right)^{1/2} \\ \rho_i = \dfrac{1}{S} \left[(\Lambda - \Lambda_i)(\Lambda - S_{ci}) \right]^{1/2} \end{cases} \qquad (2.2)$$

qui sont aussi des fonctions algébriques. Nous avons vu au chapitre II que, le choix d'une des fonctions (2) étant effectué, on peut toujours définir une décomposition du type (1) où on remplacerait k_i par ρ_i ou ρ_i° (voir ch.II).

On peut toujours définir, si K est uniforme pour tout s, une surface où D sera également uniforme ; c'est $\mathcal{R}_n$ (voir ch. II) si on choisit k_i comme fonction de poids. Pour les autres fonctions (2), on peut toujours construire une surface de ce type ; elle aura encore 2^n feuillets mais l'ensemble de ses points de branchement et son genre[9] seront différents. La surface $\mathcal{R}$, dont nous allons parler, est la surface ainsi associée à l'une des fonctions (2) ; nous préciserons laquelle quand ce sera nécessaire.

Comme la fonction D est définie à une fonction f(s) uniforme multiplicative près, il en est de même de l'ensemble des fonctions $B_\lambda(s)$. De la relation (1) et de la définition (2), il résulte que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- la matrice K est une fonction uniforme et rationnelle de s.
- la fonction D est rationnelle sur $\mathcal{R}$ (surface de Riemann associée à la fonction de poids choisie).

En jouant sur le fait que f(s) est arbitraire, on peut la choisir de façon telle que :

$$f(s)\ B_\lambda(s) \qquad , \forall L \in \mathcal{P}(N),$$

soit holomorphe dans le plan complexe de s. L'approximation rationnelle peut alors être définie par l'une des deux propositions :

- les fonctions B_λ sont des polynômes en s,
- D est rationnelle sur $\mathcal{R}$ (surface associée à l'une des fonctions de poids (2)).

II - LOIS DE DEGRES DES MODELS PHENOMENOLOGIQUES.

II.1 - Les modèles de Ross et Shaw[5].

1 - "L'effective range theory" de Ross et Shaw[5] revient à dire que le développement limité de la matrice K^{-1} autour d'un point :

$$K^{-1}_{ij} = (M_o)_{ij} + \frac{1}{2} R_{ij} (\lambda - \lambda_0) + \ldots \qquad , \qquad (3)$$

peut être tronqué à l'ordre zéro ou 1 en $(s-s_o)$. Dans (3), M_o et R sont des matrices constantes et :

$$R_{ij} = R_i \delta_{ij}$$

L'approximation :

$$K^{-1} = M_0 \quad . \tag{1}$$

porte le nom de "longueur de diffusion" ou "zéro range" ; nous la noterons (ZR).
L'approximation :

$$K^{-1} = M_0 + \frac{1}{2} R (\lambda - \lambda_0) \tag{5}$$

porte le nom d'approximation en portée effective, nous la noterons (ER).

2 - Lois de degrés des modèles de Ross et Shaw.

Comme nous travaillons en matrice K, le formalisme B/B est bien adapté à l'analyse de ces modèles :

$$\Delta_L(K) = \frac{B_\lambda}{B_0} \quad \text{et} \quad \Delta_L(K^{-1}) = \frac{B_{\nu-\lambda}}{B_\nu} \quad . \tag{6}$$

- En écrivant tous les sous-déterminants diagonaux de l'expression (4), on voit que la loi de degré du modèle (ZR) est :

$$d^\circ B_\lambda = 0 \qquad \forall L \in \mathfrak{I}(N) \; ; \tag{7}$$

par suite les fonctions B du modèle (ZR) sont des constantes.

- Il est facile de voir que tout sous-déterminant diagonal de K^{-1} donné par l'expression (5) donnera un polynôme en s :

$$\Delta_M(K^{-1}) = P_m(s) \quad ,$$

dont le degré est égal à la dimension m de la sous-matrice choisie. Par suite, à une fonction uniforme près sans aucune importance physique, la loi de degré du modèle (ER) est :

$$\begin{cases} d^\circ B_0 = n \\ d^\circ B_\lambda = n - \ell \qquad \forall L \in \mathfrak{I}(N) \end{cases} \quad , \tag{8}$$

(Si certains coefficients étaient nuls, les égalités deviendraient inégalités).

- Les lois de degré (7) et (8) contiennent a priori :

$$\begin{cases} 2^n - 1 & \text{paramètres pour (ZR)} \\ 2^n + \frac{2^n(2^n+1)}{2} - 1 & \text{paramètres pour (ER)} \end{cases} \qquad (9)$$

où on a retranché 1 pour des questions d'homogénéité.

Les relations (4) et (5) montrent que ces paramètres ne sont pas indépendants et, puisque K^{-1} étant symétrique, il y a :

$$\frac{n(n+1)}{2} \quad \text{paramètres indépendants en (ZR)}$$

et (10)

$$n + \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{paramètres indépendants en (ER)}$$

En comparant (9) et (10) on voit que tous les paramètres des polynômes -éventuellement constants- sont liés par des relations dont le nombre, pour chaque modèle, est obtenu en retranchant (10) de (9) :

$$\begin{cases} \mathcal{R}_n^{ZR} = 2^n - \frac{n(n+1)}{2} - 1 \\ \mathcal{R}_n^{ER} = 2^n + 2^{n-1}(2^n+1) - n - \frac{n(n+1)}{2} - 1 \end{cases} \qquad (11)$$

Nous retrouvons ici les relations de surdétermination introduites au chapitre II, en plus simple puisqu'il s'agit de polynômes. Comme on le voit ces relations expriment bien les contraintes à introduire pour rendre équivalentes les formalismes matriciel et déterminantal.

II.2 - La condition faible de Levinson[2] (WLC).

En théorie de la matrice S, ce que nous convenons d'appeler "condition faible de Levinson" est la propriété :

$$\lim_{\lambda \to \infty} S_{ij}(s) = \delta_{ij}$$

d'où l'on déduit :

$$\forall L \in \mathcal{P}(N) \quad , \quad \lim_{\lambda \to \infty} \Delta_L(s) = 1 \quad . \qquad (12)$$

Traduite en formalisme D/D, la relation (12) s'écrit :

$$\forall L \in \mathcal{B}(N) \qquad \lim_{\lambda \to \infty} D_\lambda(s) = \lambda^C \quad , \tag{13}$$

où C est le nombre de pôles CDD de la théorie.

La relation (13) traduit aussi une forme affaiblie du théorème de Levinson (d'où son nom) puisque, en théorie du potentiel, la relation (13) existe toujours[10] avec C = 0.

Pour que l'expression (1) vérifie (13), il faut imposer aux polynômes $B_\lambda(s)$ des conditions sur leurs degrés qui dépendent de la fonction de poids choisie. Avec k_i comme fonction de poids, il est clair que pour que D ait le même comportement dans tous les feuillets de la surface de Riemann, il faut imposer

$$d^\circ B_o = c \quad > d^\circ B_\mu + \frac{m}{2} \qquad , \left(\rho_{k_M} \underset{\lambda \to \infty}{\sim} \lambda^{m/2} \right) , \tag{14}$$

qui fixe la loi de degré correspondant à l'onde s. En désignant par $E(x)$ la partie entière du nombre x , la loi de degré dans le cas de l'onde $\ell \neq 0$ s'écrirait :

$$d^\circ B_\mu \leq E\left(c - m[\ell + \tfrac{1}{2}] \right) \qquad (\forall M \in \mathcal{B}(N)) \tag{15}$$

Pour les autres fonctions de poids, les lois de degrés sont différentes et plus simples ; que la fonction de poids soit ρ_i ou ρ_i° , et quelle que soit l'onde ℓ , la loi de degré du modèle (WLC) est :

$$d^\circ B_\mu \leq d^\circ B_o - 1 \quad , \forall M \in \mathcal{B}(N). \tag{16}$$

II.3 - Modèles de Breit-Wigner à largeurs variables (BW).

Un modèle (BW) pour une particule ("one-level") est indistinguable du modèle (WLC) avec C = 1. La caractéristique du modèle à plusieurs particules ("many levels") est que les largeurs sont toutes du type :

$$m\Gamma_i = \left[k_i \; B_i \right]_{\lambda = m^2} \quad ,$$

ce qui revient à dire que l'amplitude ne contient pas de termes en :

$$k_i\, k_j\, B_{i+j} \quad .$$

En formalisme B/B cela revient à poser :

$$\Delta_L(K) = 0 \qquad \text{si} \qquad \text{Card}(L) \geqslant 2 \quad ; \tag{17}$$

la fonction D_0 s'écrit alors :

$$D_0 = \sum_{j \in N} -i\, k_j B_j$$

La condition (17) exprime simplement que K est de rang 1 pour tout s. Les lois de degré se déduisent aisément de (15), (16) et (17) pour toute fonction de poids[(*)] :

$$(BW) \begin{cases} d^\circ B_0 = c \geqslant 1 \\ 0 \leqslant d^\circ B_i \leqslant c-1 \\ d^\circ B_\mu = -1 \qquad \text{si } m \geqslant 2 \quad . \end{cases} \tag{18}$$

III - "ZEROLOGIE" DES MODELES RATIONNELS.

La comparaison des différentes lois de degré montre qu'un modèle rationnel correspond à une loi de degré des fonctions B_λ de la matrice K. Si nous faisons abstraction des relations entre coefficients, il est facile de voir que cette correspondance est biunivoque. Nous avons donc, de cette façon, une première caractéristique des modèles phénoménologiques.

Un second trait caractéristique de ces modèles est le nombre de zéros qu'engendrent les lois de degré; il dépend de façon cruciale de la fonction de poids choisie. En effet, qu'on fasse ou non l'approximation rationnelle, ce qui permet la description d'une physique quelconque sont les singularités de l'amplitude, considérée comme fonction analytique de l'énergie. Comme dans les modèles rationnels les pôles de T sont des zéros de D, il importe de savoir de combien de zéro on dispose dans un modèle, pour savoir quel niveau de complexité de la réalité on peut espérer décrire.

(*) On convient qu'un "polynôme" de degré -1 est identiquement nul.

III.1 - Méthode de dénombrement des zéros.

Il suit du théorème I, énoncé au § I-1, que le nombre de zéros de D sur $\mathcal{R}$ est égal au nombre total des pôles ; ceux-ci sont engendrés, à distance finie, par les seules fonctions de poids. Nous allons donc dénombrer les pôles (à distance finie et à l'infini) qui apparaissent pour chaque modèle, chaque fonction de poids et chaque onde.

En regardant nos fonctions de poids donné par les relations (2), il est clair que les seuls pôles de la fonction D dans les modèles rationnels sont en $s = 0$ ou en $s = \infty$.

Pour un point régulier z_0 (*) de $\mathcal{R}$, si D se comporte comme :

$$D \underset{z \to z_0}{\sim} \frac{\alpha}{(z - z_0)^p} \qquad (p \text{ entier positif}), \qquad (19)$$

z_0 est un pôle d'ordre p de D ;
dans le cas où z_0 est un point de branchement de $\mathcal{R}$ et si :

$$D \underset{z \to z_0}{\sim} \frac{\alpha}{(z - z_0)^{q/2}} \qquad (q \text{ entier positif}), \qquad (20)$$

z_0 est un pôle d'ordre q de D.
La fonction $\Lambda(s)$:

$$\Lambda(s) = \prod_{\mu=0}^{2^n - 1} D_\mu ,$$

est une fonction uniforme dans le plan complexe de s. Il est clair que le nombre de pôles de Λ dans le plan complexe de s est égal au nombre de pôles de D sur la surface de Riemann $\mathcal{R}$. On a donc un moyen simple de compter ce nombre puisque, pour le cas de l'approximation rationnelle, la fonction Λ est le quotient de deux polynômes en s. En appliquant alors le théorème 1 énoncé au début de ce chapitre, on déduit le nombre de zéros de D sur $\mathcal{R}$. Les résultats obtenus sont donnés dans les tableaux I et II suivants pour le cas de l'onde $\ell \neq 0$ et $\ell = 0$ car, pour certains modèles, il n'y a pas continuité pour toutes les valeurs de ℓ. Au tableau III, nous donnons les nombres de zéros pour les ondes s et p (cas de 2 voies) : on voit la différence de structure d'un modèle à l'autre, d'une fonction de poids à une autre.

(*) Si z_0 est le point à l'infini, les formes (19) et (20) s'écrivent respectivement $D \underset{z \to z_0}{\sim} z^p$ et $D \underset{z \to z_0}{\sim} z^{q/2}$ avec les mêmes conclusions.
Nous ne donnons les formules que pour les points de branchement en racine carrée qui seuls interviennent dans nos problèmes.

Le tableau III montre, par exemple, que pour une même onde, et une même fonction de poids le nombre de zéros peut varier du simple au quadruple quand on change de modèle.

IV - SUR LES PROPRIETES D'IRREDUCTIBILITE DES MODELES RATIONNELS.

IV.1 - Les zéros effectifs d'un modèle.

Comme nous l'avons annoncé c'est dans le cas de deux voies que nous allons mener cette discussion. Il convient de remarquer que, de façon générale, si la fonction D (ou la matrice S) a un zéro à une affixe complexe de $\mathcal{R}$, la T-invariance impose à D d'avoir un zéro dans le même feuillet à la position complexe conjuguée du précédent. Dans le cas de deux voies, pour la fonction de poids k_i, nous savons qu'il existe une transformation conforme qui applique la surface $\mathcal{R}_n$ dans le plan de la variable complexe u définie par :

$$\begin{cases} k_1 = 2\lambda \dfrac{u}{1+u^2} \\ k_2 = i\lambda \dfrac{1-u^2}{1+u^2} \end{cases},$$

où

$$\lambda = (s_2 - s_1)^{1/2} .$$

En se reportant à la figure (4) du chapitre V , on peut voir quelle est l'image de la région physique dans le plan de u . Par ailleurs, comme la description d'une structure sur la région physique suppose l'existence de zéros de D proches de celle-ci, s'ils sont complexes, les zéros associés par T-invariance sont généralement loin de la région de mesure. Ils ne contribuent que par des corrections mineures à la forme de l'amplitude.

Les zéros de T-invariance ne sont pas les seuls à n'être pas "effectifs". Dans le cas du modèle (ZR), la fonction D ayant la forme indiquée en figure (3), deux des quatre zéros ne peuvent participer à la description d'une structure sur la région physique que par des effets correctifs(*).

Tout ceci montre que le nombre de zéros de D ne suffit pas pour indiquer la capacité d'un modèle à décrire une structure. Dans le cas des modèles (ZR) et (BW) dont les fonctions D (voir les figures (3) et (4)) ont quatre zéros, seul un (modèle (ZR)) ou deux (modèle (BW)) d'entre eux peuvent être effectifs.

(*) C'est aussi le cas du zéro de T-invariance.

Fonction de Poids	$k_i \; 2\ell + 1$	$(\rho_i^\circ) \; 2\ell + 1$	$(\rho_i) \; 2\ell + 1$
Condition Faible de Levinson (WLC)	$Z = c.\ 2^n$ $c \geqslant \ell + 1$ $Z_{min} = (\ell + 1).\ 2^n$	$Z = 2^{n-1}\left[2c + n(2\ell+1)\right]$ $c \geqslant 1$ $Z_{min} = 2^{n-1}.\left[2+n(2\ell+1)\right]$	$Z = 2^n\left[c+n(2\ell+1)\right]$ $c \geqslant 1$ $Z_{min} = 2^n.\left[(2\ell+1)n+1\right]$
Modèles de Breit-Wigner $c \geqslant 1$ (BW)	. $b = d^\circ G_i \leqslant c-1$. Si $0 \leqslant b \leqslant c-\ell-1$ $Z = c.2^n$ .Si $b \geqslant 0$, $b \geqslant c-\ell$ $Z = 2^{n-1}.\left[(\ell+b)+1\right]$	$Z = 2^{n-1}.\left[2(\ell+c)+1\right]$	$Z = 2^n.(2\ell + c + 1)$
ZR Ross et Shaw Modèles en longueur de diffusion	$Z = 2^{n-1}.n.(2\ell + 1)$	$Z = 2^{n-1}.n.(2\ell+1)$	$Z = 2^{n-1}.n.(2\ell+1)$
ER Ross et Shaw Modèles de portée effective.	$Z = 2^{n-1}.n.(2\ell + 1)$	$Z = 2^{n-1}.n.(2\ell + 3)$	$Z = 2^{n+1}.n.(\ell+1)$

Tableau I

"Zérologie pour $\ell \neq 0$ à n voies".

Fonction de Poids	k_i	ρ_i°	ρ_i
Levinson ou Breit-Wigner	$c \gg 1$ $Z = 2^n \cdot c$	$c \gg 1$ $Z = 2^{n-1} (2c + n)$	$c \gg 1$ $Z = 2^n (c + n)$
Ross et Shaw longueur de diffusion	$Z = n \cdot 2^{n-1}$	$Z = n \cdot 2^{n-1}$	$Z = n \cdot 2^n$
Ross et Shaw portée effective	$Z = n \cdot 2^n$	$Z = 3 \cdot n \cdot 2^{n-1}$	$Z = n \cdot 2^{n+1}$

Tableau II

"Zérologie en onde S pour n voies"

Fonction de Poids	Onde S			Onde P			
	Levinson ou B.W.	R.S. longueur de diffusion	R.S. portée effective	Levinson	B.W. $c \geqslant 1$	R.S. longueur de diffusion	R.S. portée effective
k_i	4 c $c \geqslant 1$	4	8	4 c $c \geqslant 2$	$b = d^\circ B_i$, $I \in N$. $0 \leqslant b \leqslant c-2$ $Z = 4c$. $b = c-1$ $Z = 2(c+1)$	12	12
ρ°_i	4 (c + 1) $c \geqslant 1$	4	12	4 (c+3) $c \geqslant 1$	2 (2c +3)	12	20
ρ_i	4 (c + 2) $c \geqslant 1$	8	16	4 (c + 6) $c \geqslant 1$	4 (c + 3)	12	32

Tableau III

"Zérologie à deux voies en ondes S et P".

IV.2 - Nombre de pôles proches du second seuil dans le problème à 2 voies.

En général, dans un problème, le nombre de feuillets non physiques qui touchent en un point la région physique (mis à part le feuillet physique lui-même) est égal à un. Cependant, dans le voisinage des seuils, le nombre de feuillets proches peut être plus grand. Dans le cas de 2 voies par exemple, si au voisinage du seuil s_1 il n'y a que deux feuillets qui bordent la région physique (voir fig. 4, chapitre V), au voisinage de s_2, ce nombre passe à quatre. Ce phénomène a une très grande importance pour la description d'un éventuel dédoublement des pics dans les sections efficaces au voisinage des seuils ; en effet, c'est au voisinage de ces seuls points que les pôles des feuillets lointains peuvent jouer un rôle déterminant sur le feuillet physique. Le phénomène peut être sensible dans des cas plus courants comme nous le verrons au paragraphe V.

Nous allons à présent chercher la condition générale pour qu'un modèle puisse permettre la présence de deux pôles de T au voisinage du second seuil pour deux voies de réaction.

La fonction D s'écrit pour le cas présent :

$$D_0 = B_0 - ik_1 B_1 - ik_2 B_2 - k_1 k_2 B_3 \quad , \tag{21}$$

ou :

$$D_0 = (B_0 - ik_1 B_1) - ik_2 (B_2 - ik_1 B_3) \quad . \tag{22}$$

Pour que le second seuil soit un zéro simple de D_0, il faut :

$$(B_0 - ik_1 B_1)_{s=s_2} = 0 \quad . \tag{23}$$

Comme $k_1(s_2)$ est réel et que B_0 et B_1 sont réels sur la région physique, (23) entraîne :

$$B_0(s_2) = B_1(s_2) = 0 \quad . \tag{21}$$

Pour que le second seuil soit un zéro double de D_o, il faut de plus que :

$$(B_2 - ik_1 B_3)_{\Delta=\Delta_2} = 0 \quad .$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, il faut donc :

$$B_2(s_2) = B_3(s_2) = 0 \quad . \tag{25}$$

Il est clair qu'une fonction aura deux zéros au voisinage du second seuil si par des variations continues et de faible amplitude des paramètres, le second seuil peut devenir un zéro double de la fonction. Pour la fonction variée, la condition cherchée est donc :

$$B_0 = B_1 = B_2 = B_3 = 0 \qquad \text{en } \Delta = \Delta_2 . \tag{26}$$

Le modèle (BW) est susceptible de réaliser la condition (26) mais ce n'est pas le cas de ceux de Ross et Shaw[5], lesquels nécessairement vérifient

$$B_3 \neq 0 ,$$

pour assurer l'existence de la matrice K^{-1}. Du moins en ce qui concerne les modèles en matrice K constante, si on paramétrise K au lieu de K^{-1}, la difficulté précédente peut être levée mais comme la fonction :

$$P_0 = B_0 - ik_1 B_1 - ik_2 B_2$$

(B_0, B_1, B_2 étant des constantes), n'a que deux zéros sur $\mathcal{R}$, ils sont :

- soit symétriques par rapport à l'axe imaginaire du plan de u,
- soit sur cet axe.

En tout cas, il ne peut y avoir plus d'un zéro de D proche de s_2.

IV.5 - Inéquivalence des modèles rationnels.

De tout ce qui précède nous pouvons tirer l'ébauche d'une analyse des propriétés d'irréductibilité d'un modèle à un autre. C'est-à-dire qu'il est possible de donner un fondement analytique à l'inéquivalence de deux modèles, donc des réalités qu'ils peuvent décrire.

1 - Modèles de Breit-Wigner à largeurs variables (BW).

Ils sont caractérisés par les propriétés suivantes :

a - Ils vérifient l'approximation rationnelle.

b - Ils vérifient la condition faible de Levinson.

c - Ils imposent la factorisation des matrices T et K à toute énergie.

$$\text{rang}(T) = \text{rang}(K) = 1 \qquad \forall s \in \mathbb{C} \ .$$

d - Le nombre de résonances qu'on peut décrire est indépendant du nombre de voies.

e - Dans le cas de deux voies, on peut amener deux pôles de T au voisinage du seuil s_2.

2 - Les modèles de Ross-Shaw.

Ils ont les propriétés suivantes :

a - Ils vérifient l'approximation rationnelle.

b - (ZR) viole la condition faible de Levinson, (ER) la vérifie.

c - B_ν (B_3 à 2 voies) est nécessairement non nul (il n'y a donc factorisation qu'aux pôles de l'amplitude).

d - (ZR) ne peut décrire de résonance ; le nombre maximal de résonances décrit par (ER) est fonction uniquement du nombre de voies.

e - On ne peut avoir, dans le problème à deux voies, plus d'un pôle de T au voisinage du second seuil.

3 - La comparaison de ces différents modèles phénoménologiques

montre que si les points a et b sont ou peuvent être communs, les points c , d et e sont irréductibles d'un cas à l'autre.

Alors qu'un modèle vérifiant la condition faible de Levinson est réductible à un modèle de Breit-Wigner (BW), c'est-à-dire susceptible de décrire la même physique, (WLC) et (BW) sont irréductibles aux modèles de Ross et Shaw. Ils ne peuvent donc pas décrire la même réalité.

On peut remarquer que les lois de degré et la "zérologie" des fonctions sont les ingrédients fondamentaux qui permettent cette comparaison de modèles susceptibles d'une formulation D/D. Nous allons analyser sur un cas précis (l'onde S_{11} de πN) les conséquences auxquelles peuvent conduire la description par ces deux types de modèles.

V - DIVERGENCES ENTRE DESCRIPTIONS PHENOMENOLOGIQUES.

V.1 - Cas de l'onde S_{11} de πN.

Ces descriptions donnent parfois une vue correcte des faits expérimentaux pour le cas de l'onde S_{11} de πN ; elles peuvent aussi donner des descriptions suffisamment mauvaises de la réalité pour que l'on envisage l'introduction d'hypothèses physiques nouvelles. C'est ainsi que Dobson[11] utilisant l'approximation (ZR) de Ross et Shaw pour le cas de deux voies ouvertes :

$$\pi N \quad \text{et} \quad \eta N,$$

conclut, devant les difficultés d'ajustements des valeurs des paramètres, à la nécessité d'ouvrir une troisième voie. C'est aussi la conclusion à laquelle furent conduits Hendry et Moorhouse[12] qui employèrent pouratnt un modèle de portée effective ; la troisième voie ouverte était explicitement une voie méson-nucléon (avec un méson de masse intermédiaire entre le π et le η), ou implicitement introduite en laissant les matrices M_o et R (voir § I) devenir complexes.

Uchiyama-Campbell et Logan[13] ont aussi utilisé des modèles de portée effective. Bien que leur χ^2 sont bons pour ce cas, ils ne peuvent être retenus comme modèles (ER) ; ce n'est, en effet, pas la matrice K qui a été paramétrée mais la matrice K'.

Par contre, les représentations données par ces derniers auteurs suivant en modèles de Breit-Wigner à largeurs variables, comme celle de B. Lefièvre[2] (pour une description simultanée de l'onde S_{11} de πN et de la π-production du η), sont en bon accord avec les données. Si les résultats sur le déphasage obtenus par Lefièvre[7] sont meilleurs que ceux de Uchiyama-Campbell[13], cela tient à l'introduction du $N^*(1700)$ élastique dans la voie πN.

On peut donc conclure que les tentatives de décrire l'onde S_{11} par les modèles de Ross et Shaw se sont soldées par un échec ; les modèles de Breit-Wigner ou ceux vérifiant la condition faible de Levinson ont décrit la physique de façon adéquate.

La comparaison de la structure en zéros de D correspondant au modèle (BW) ou (WLC), à celle correspondant au modèle (ZR) est révélatrice des difficultés de ce dernier modèle à décrire l'onde S_{11}. La phase correspondant au modèle de Dobson[11] (fig. 1) présente un point de rebroussement qui n'existe ni dans le modèle de Uchiyama-Campbell[13] ni dans celui de Lefièvre[2] (voir fig. 2). Les structures en zéros correspondant respectivement à ces deux modèles sont données sur les fig. (3) et (4). L'interprétation analytique est alors la suivante ; le point de rebroussement dans la phase, est engendré par le zéro de D_o situé dans le feuillet 2 (feuillet "super non physique" de Kato[14]) et est "adouci" par la proximité du zéro de D_o dans le feuillet 3.

Pour décrire l'onde S_{11} de πN, il n'est donc pas nécessaire d'ouvrir une troisième voie ; il suffit de changer de type de modèle. Ceci ne veut pas dire qu'une analyse plus fine des données expérimentales n'exigera pas l'ouverture d'autres voies[8], mais que la phénoménologie peut encore s'en passer.

Avant de clore cette discussion remarquons que le $N^*(1520)$ est décrit comme résonance par Uchiyama-Campbell et Logan et par Lefièvre et Lerusto, tandis qu'il est décrit comme état lié virtuel ("Virtuel Bound State"[4]) par Dobson.

V.2 - Remarques sur le $Y_o^*(1405)$.

Comme nous l'avons déjà dit, il y a eu jusqu'à présent diverses tentatives de description phénoménologique de $\bar{K}N$ dans un voisinage des seuils, relativement restreints en énergie. De nombreuses méthodes ont été utilisées faisant appel tant à la théorie du potentiel[15], qu'au formalisme ND^{-1}, aux modèles rationnels[5] ou locaux[4] en matrcie K ; les descriptions ainsi obtenues sont assez bonnes[3][6]. Bien que les modèles soient différents (on a pu utiliser avec succès des modèles (ZR) ou (BW) pour l'onde S_{01}), ils concordent tous sur la violation de SU(3) par la constante de couplage du $Y_o^*(1405)$ à la voie $\Sigma\pi$.

Bien qu'il se puisse que ceci soit un résultat physique correct (indépendant du modèle choisi), nous avons vu (ch. V) qu'une telle conclusion ne pouvait pas être tenue pour définitive. En dehors des questions d'indéterminations que nous avons examinées, des raisons expérimentales confirment cette vue des choses. Un récent travail de Cline et al[16] sur les collisions

$\bar{K}N$ (nucléon hors couche du deutéron) semble indiquer un très faible couplage du Y_o^* (1405) dans la réaction :

$$\bar{K}N \longrightarrow Y^*(1405) \rightarrow \Sigma\, \pi \quad .$$

Si l'on admet que la "virtualité" du nucléon qui permet d'étudier $\bar{K}N$ sous son seuil, conserve les traits fondamentaux du processus, ce résultat est important(*) : il indiquerait qu'il faut analyser l'onde d'isospin I=0 de $\bar{K}N$ en omettant pratiquement le $Y_o^*(1405)$. Or, au moins en ce qui concerne les modèles en matrice K, la description des phénomènes semble introduire des singularités proches du seuil $\bar{K}N$ qu'on n'obtiendrait peut être pas en traitant les données expérimentales dans un plus large domaine en énergie, que le seul voisinage du seuil $\bar{K}N$.

VI - CONCLUSIONS.

Dans ce chapitre nous nous sommes attachés à montrer qu'une comparaison était possible entre divers types de modèles utilisés pour traiter phénoménologiquement les données expérimentales. Nous avons ainsi vu qu'ils correspondaient au formalisme D/D (ou B/B) tel que nous l'avons développé avec, en plus, une hypothèse dynamique simplificatrice : l'approximation rationnelle.

En utilisant le cadre formel de D/D, nous avons pu montrer qu'il était possible de trouver des caractérisations de ces modèles (lois de degré, "zérologie") qui permette de les comparer. Nous avons ainsi montré que les descriptions que donnent ces modèles peuvent être inéquivalentes. La possibilité de donner un fondement mathématique à une telle notion permet d'envisager la définition précise de grandeur physique à partir de la phénoménologie. En effet décrire une même physique par des modèles inéquivalents ((ZR) et (BW), par exemple) permet de donner une description de la réalité, la plus "indépendante" possible des modèles.

(*) Si nous employons le conditionnel, c'est aussi parce qu'il reste à prouver que les autres hypothèses de ces auteurs sur la prédominance des résonances Λ (1520) et Σ(1385) ne sont pas pour quelque chose dans leur résultat sur le $Y_o^*(1405)$.

Il est,d'autre part,possible de se donner a priori une loi de degré et de lui associer un modèle phénoménologique. Nous verrons au chapitre suivant, en introduisant une interprétation physique simple des modèles rationnels, que la théorie des champs permet d'introduire des modèles non utilisés ayant un sens physique précis.

°

° °

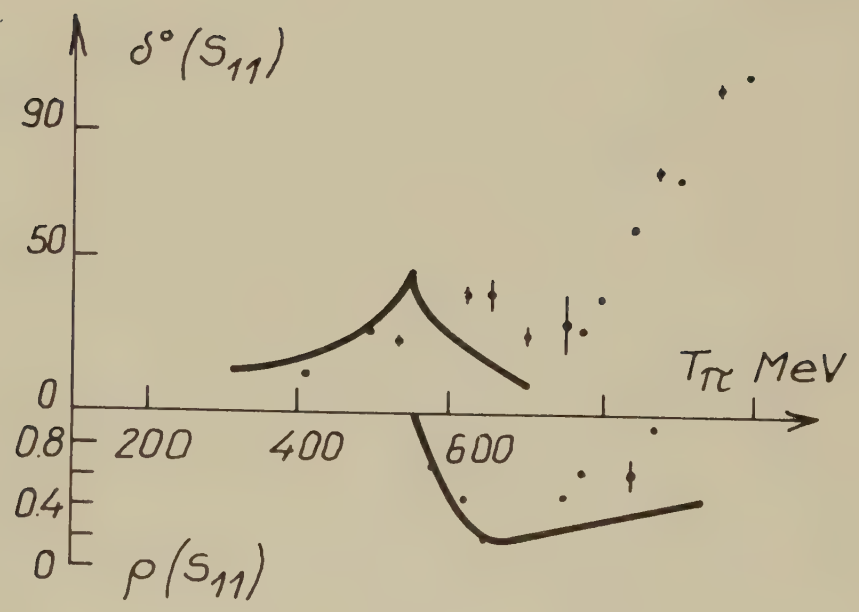


Figure 1

Déphasage et absorption selon Ball (et Dobson)

Les points expérimentaux sont ceux de Bareyre

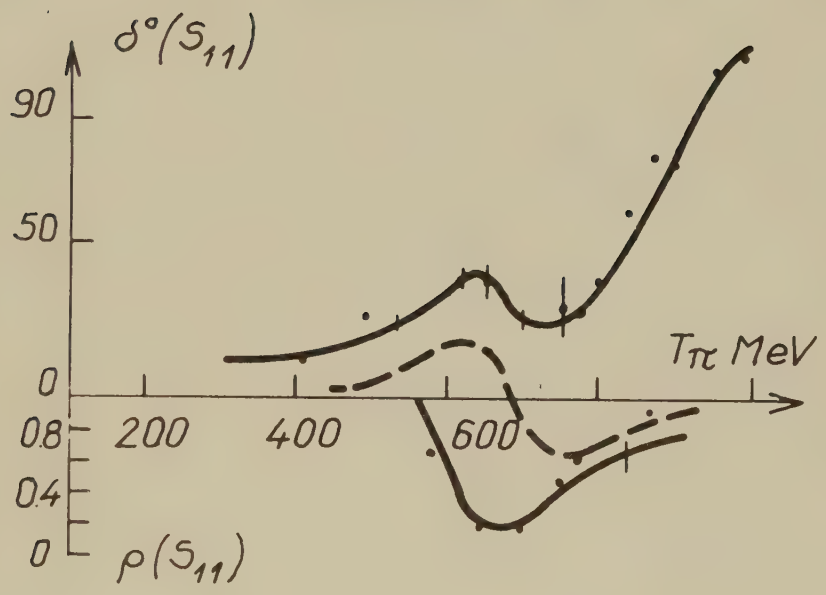


Figure 2

Déphasage et absorption par un modèle de Breit-Wigner. La ligne continue est le "fit" de Lefièvre avec un "fond" élastique. La ligne discontinue est le "fit" de Lefièvre sans "fond" élastique ou fit BW2 de Uchiyama-Campbell Morgan. Les points expérimentaux sont ceux de Bareyre.

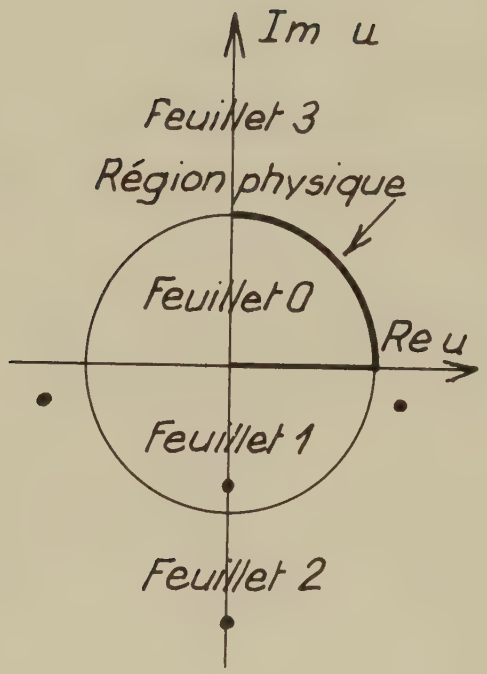


Figure 3

• Zéros de la fonction D

Cas de Dobson (modèle de Ross et Shaw : $K^{-1} = Mo$) .

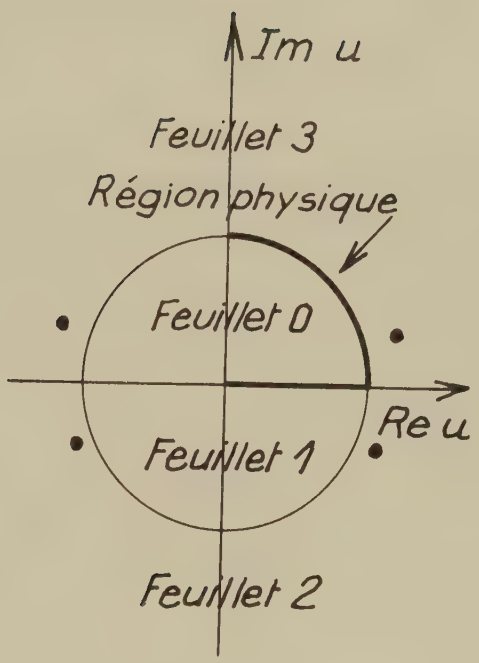


Figure 4

• Zéros de la fonction D

Cas de Uchiyama-Campbell Logan ou Lefièvre

(modèle de Breit-Wigner).

C H A P I T R E VII

-:-:-:-:-:-:-:-:-

SUR LA FONCTION D ET LA MATRICE K EN THEORIE DES PERTURBATIONS

-:-

Pour étudier d'un point de vue plus physique, les modèles phénoménologiques utilisés pour décrire les interactions fortes à basse énergie, il peut être intéressant de se référer à des notions de théorie des champs. On peut, dans ce cadre théorique, espérer donner aux diverses approximations que nous avons analysé au chapitre précédent, un sens physique plus immédiat (particules échangées, types d'interaction). Parmi les plus simples -et résolubles explicitement- des modèles de théorie des champs figurent celui, non relativiste, de T.D. LEE[1] qui introduit une fonction de coupure ("cut-off"), le modèle galiléen qu'on peut considérer comme la limite du modèle de Lee quand le cut-off tend vers l'unité, et enfin, le modèle relativiste de Zachariasen[2]. Comme ces modèles vérifient l'unitarité étendue, la T-invariance et la causalité dans l'approximation des voies à deux corps, ils sont susceptibles d'une formulation D/D. Ceci nous intéresse à plusieurs égards :

1°/ - Ils peuvent donner une interprétation physique de l'approximation rationnelle et de l'inéquivalence des modèles qui la vérifient.

2°/ - Ils peuvent conduire à formuler des modèles phénoménologiques simples.

3°/ - Le formalisme D/D fournit une méthode simple pour prolonger la fonction D -donc la matrice S- dans les feuillets non physiques. Or, depuis Peierls[3], les particules instables sont introduites en théorie des champs comme singularités du propagateur habillé dans les feuillets non physiques[4][5][6][7][8]. Comme une telle hypothèse nécessite le prolongement analytique du propagateur dans l'ensemble des feuillets d'une surface de Riemann à préciser, l'emploi du formalisme D/D peut être utile.

Une telle démarche n'est pas entièrement nouvelle ; B.W. Lee et al[9], Akiba et al[10], par exemple, se sont intéressés aux relations entre notions de théorie des champs (particules élémentaires ou composées) et propriétés locales du formalisme N/D à une voie. Ce qui va nous intéresser ici est l'étude des trois points mentionnés plus haut dans le cadre du formalisme D/D, en partant de la série de perturbation de l'amplitude à n voies de deux corps[11][12]. L'amplitude se déduit aussi des états propres du hamiltonien. Ces deux procédés -série de perturbation et diagonalisation du hamiltonien- sont d'ailleurs équivalents.

Comme le formalisme D/D suppose que nous soyons en présence de fonctions analytiques, nous aurons besoin d'une décomposition analytique des boucles de "self-énergie" qui s'introduisent dans la série de perturbation de l'amplitude. On verra que cette décomposition coïncide, sur la région physique, avec la décomposition classique en parties réelle et imaginaire.

Dans le paragraphe III nous déduirons la fonction D de l'équation itérative vérifiée par la matrice amplitude. En utilisant la décomposition standard de D en termes des fonctions B_λ, nous expliciterons les lois de degré associées à différents types d'interactions nues (une ou plusieurs particules échangées, avec ou sans interaction de contact). Nous verrons que les différents modèles rationnels en matrice K que nous connaissons se ramènent au modèle galiléen avec différents types d'interactions nues. Il nous sera même possible d'introduire de nouvelles formes phénoménologiques de la matrice K ayant un sens physique précis.

Les calculs menant à ces résultats contiennent des "paramètres" infinis provenant de la divergence des boucles de "self-énergie". Il nous faut donc montrer, et c'est l'objet du paragraphe IV, que ces constantes infinies peuvent être éliminées des formules par une "renormalisation" et remplacées par des paramètres finis. L'idée fondamentale de la renormalisation, quand il y a des divergences dûes aux boucles de self-énergie, revient à imposer des conditions aux pôles de l'amplitude ; la "renormalisation" que nous allons opérer consiste, elle, à imposer des conditions aux coefficients de la fonction D (i.e. à des sommes et produits de pôles de l'amplitude). Nous verrons que ce procédé a plusieurs avantages, le principal étant de montrer que la forme analytique de l'amplitude, donc les lois de degré, se conservent dans notre renormalisation ; celle-ci n'est, en dernière analyse, qu'un procédé

voisin de la "régularisation"[13]. Pour notre propos, cela revient à dire que l'interprétation des modèles phénoménologiques se conserve après renormalisation.

Au paragraphe V, nous montrerons que la matrice K associée à ces modèles, obéit à la même équation itérative que l'amplitude, à une transposition près qui correspond à ce que, pour la matrice K, la boucle de self-énergie n'est qu'une partie de celle associée à l'amplitude. Comme nous avons pu déduire les lois de degré des propriétés de D, on peut aussi les obtenir en partant de l'équation itérative de K. Nous pouvons même écrire directement la forme explicite des fonctions B_λ en termes des paramètres de l'interaction.

Au paragraphe VI, nous examinerons dans des cas particuliers, les critères d'élémentarité des particules. Nous montrerons que ceux-ci se ramènent à la seule condition :

$$\left[D_0'(s_T)\right]^{-1} = 0 \quad ,$$

si s_T est pôle de T. On montrera que cette expression prend aussi une forme simple en théorie de la matrice K.

I - LES MODELES SANS VOIE CROISEE EN THEORIE DES CHAMPS - RAPPELS.

Les modèles que nous allons étudier ont la particularité de n'avoir pas de voie croisée, c'est-à-dire que l'amplitude ne présente pas, à gauche, de coupure dynamique. En tant que modèles, ceux qui suivent (et d'autres) ne sont que des approximations de types variés de la théorie complète des champs ; à ce titre, ils ne prétendent pas décrire la réalité mais, au mieux, rendre compte grossièrement de certains de ses aspects. Comme on les choisit, généralement, assez simples pour que les calculs puissent y être menés à terme, ils permettent d'expliciter le contenu de certaines hypothèses physiques. Nous allons rappeler ici, dans le cas d'une seule voie ce que sont les modèles de Lee[1] et Zachariasen[2] ainsi que le modèle galiléen. Des généralisations au cas de plusieurs voies existent[11][12] qui sont, par ailleurs, l'objet de ce chapitre.

1°/ - Le modèle de Lee[1][14] et le modèle galiléen.

Le modèle non relativiste de Lee décrit un univers où n'existent que trois particules, deux fermions (N, V) et un boson (θ), qui n'interagissent que par le processus :

$$V \rightleftharpoons N\,\theta \qquad (1)$$

Pour simplifier davantage, on suppose encore les deux fermions suffisamment lourds pour qu'on puisse confondre leur énergie totale et leur masse au repos (modèle statique). La méthode classique utilisée pour construire l'amplitude[15][16] consiste à diagonaliser le hamiltonien :

$$H = H_o + H_I \qquad (2.1)$$

où H_o, le hamiltonien libre, est donné par la formule :

$$H_o = m_N \psi_N^+ \psi_N + m_V^o \psi_V^+ \psi_V + \int d\vec{k}\ \omega(\vec{k})\ a^+(\vec{k})\, a(\vec{k}) \qquad (2.2)$$

et H_I, le hamiltonien qui décrit l'interaction, par :

$$H_I = -\frac{g_o}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{k}\ \frac{f(\omega)}{\sqrt{2\omega}} \left\{ \psi_V^+ \psi_N\, a(\vec{k}) + a^+(\vec{k})\, \psi_N^+ \psi_V \right\} \qquad (2.3)$$

avec :

$$\omega^2 \equiv \left[\omega(\vec{k})\right]^2 = \vec{k}^2 + \mu^2 \qquad (2.4)$$

Dans les expressions (2) nous avons choisi le système de notations suivant :

. ψ_N^+ (ψ_N), ψ_V^+ (ψ_V), $a^+(\vec{k})$ ($a(\vec{k})$) sont les opérateurs de création (de destruction) d'une particule N, V et θ (d'impulsion $\vec{k}$).

. m_N est la masse de la particule N, m_V^o la masse "nue" de la particule V et μ celle du boson θ.

. g_o est la constante de couplage "nue" au vertex $VN\theta$ et $f(\omega)$ -choisie comme fonction analytique réelle de ω - est une fonction de coupure ("cut-off" ou facteur de forme du vertex).

Le qualificatif de "nue" affecté à la masse m_V^o et à la constante g_o, indique que ce ne sont pas la masse et la constante de couplage physiques

(observées) de la particule V ; ces deux derniers paramètres ($m_{V,g}$) s'obtiennent à partir des grandeurs "nues" par un procédé classique de "renormalisation" (voir, par exemple, les références (13), (14) et (15)).

De la diagonalisation du hamiltoien (2) on déduit les états propres de cet opérateur écrit sous la forme :

$$| n_V , n_N , n_\theta (\vec{k}_1 , \ldots , \vec{k}_{n_\theta}) > \qquad (3)$$

qui précise le nombre de particules de chaque espèce (avec, éventuellement, leurs impulsions). En partant des états à une particule N et un boson θ , on construit les états asymptotiques :

$$| 1_N , 1(\vec{k}) + > \quad , \quad | 1_N , 1(\vec{k}') - >$$

(qui sont les états émergent et incident) et la matrice S qui décrit la transition :

$$S(\vec{k}, \vec{k}') = < 1_N , 1(\vec{k}') - | 1_N , 1(\vec{k}) + > ,$$

d'où on déduit l'amplitude (voir par exemple les références (15)).

Le modèle de Lee classique est obtenu en choisissant pour $f(\omega)$ une fonction telle que les intégrales apparaissant dans le calcul de l'amplitude soient convergentes ; le modèle galiléen correspond au hamiltonien (2) où l'on pose :

$$f(\omega) \equiv 1 ,$$

ce qui fait que, dans cette théorie, des intégrales (qui donnent la "self-énergie") divergent.

2°/ - Construction de l'amplitude par série de perturbation.

Pour construire l'amplitude, on peut employer une méthode différente de la précédente et qui lui est équivalente. Il s'agit de représenter l'amplitude par une "série de perturbation", chacun des termes de celle-ci étant représenté par un graphe dont l'expression analytique s'obtient en utilisant les règles de Feynmann suivantes[16](*) :

a) - Lignes externes :

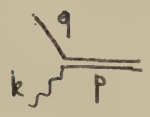
V ——P——→ $(2\pi)^{-3/2}$

(*) On tient compte dans les formules des propagateurs du fait que la théorie est non relativiste.

N $\longrightarrow$ $(2\pi)^{-3/2}$

θ $\longrightarrow$ $(2\pi)^{-3/2}\left[2\,\omega(\vec{k}')\right]^{-1/2}$

b) Vertex :

 $\longrightarrow$ $i\,g_0\,(2\pi)^4\,f(\omega(\vec{k}'))\,\delta^4(p-k-q)$

c) - Lignes internes :

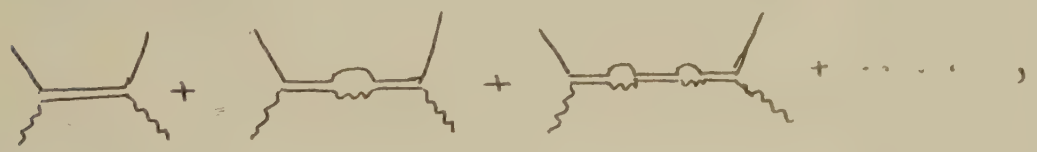
$\longrightarrow$ $\Delta_0(p) = \dfrac{i}{(2\pi)^4}\,\dfrac{1}{p_0 - m_N^0 + i\varepsilon}$

$\longrightarrow$ $\dfrac{i}{(2\pi)^4}\,\dfrac{1}{q_0 - m_N + i\varepsilon}$

$\longrightarrow$ $\dfrac{i}{(2\pi)^4}\,\dfrac{1}{2\,\omega(\vec{k})}\,\dfrac{1}{k_0 - \omega(\vec{k}') + i\varepsilon}$

L'indice 0 affecté à p, k ou q indique qu'il s'agit de la composante temporelle des quadrivecteurs correspondants.

A des facteurs cinématiques près[15][16], l'amplitude "non renormalisée" du modèle de Lee (ou galiléen si $f \equiv 1$) correspond à la série géométrique suivante :



dont la somme est :

$$T = \frac{g_0^2\,\Delta_0}{1 - g_0^2\,\Delta_0\,\Sigma} \qquad (4)$$

où Σ est la boucle de self-énergie[16] qui s'exprime par[(*)] :

$$\Sigma(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{\mu}^{\infty} d\omega'\,\frac{f^2(\omega')\,\sqrt{\omega'^2 - \mu^2}}{\omega' - \omega} \qquad (5)$$

(*) On omet des facteurs de normalisation dans la relation (5) (comme dans la relation (6)).

Si on définit la variable s par :

$$\omega = \frac{s - (m_N^2 + \mu^2)}{2 m_N} \quad , \qquad (5')$$

en tenant compte que le modèle est non relativiste :

$$\omega + \mu \neq \mu \quad ,$$

et comme on a :

$$\omega - \mu = \frac{1}{2 m_N} \sqrt{s - s_0} \quad , \quad s_0 = (m_N + \mu)^2 \quad ,$$

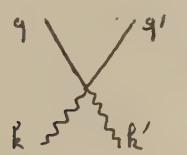
l'expression (5) prend la forme :

$$\Sigma(s) = \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} ds' \frac{f^2(s') \sqrt{s' - s_0}}{s' - s_0} \quad ; \qquad (6)$$

c'est la formule que nous utiliserons pour la "self-énergie" de ces modèles.

Ce modèle a été développé dans deux directions :

. Introduction d'une interaction de contact :



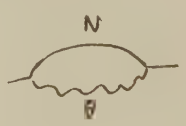
$$\longrightarrow \quad i \lambda_0 (2\pi)^4 f(\omega(\vec{k})) f(\omega(\vec{k'})) \delta^4(q + k - q' - k')$$

à la place[16] de l'échange de V, ou superposée à cet échange[12].

. Généralisation au cas de plusieurs voies de deux corps[12].

3°/ - Modèle de Zachariasen[2].

Ce modèle n'a pas été construit à partir d'un lagrangien ou hamiltonien mais en utilisant les relations de dispersion. Pour obtenir l'amplitude correspondante on peut également utiliser la théorie des perturbations que nous venons de rappeler ; il suffit pour cela de remplacer les formules non relativistes des propagateurs par les expressions relativistes correspondantes (opérateurs de Klein-Gordon). On peut dire, en gros, que ce qui change par rapport au modèle de Lee est l'expression analytique de la self-énergie et, dans tous ces cas, celle-ci n'est que l'intégrale correspondant au graphe (voir par ex. Schweber, réf. (15)) :



La variable s que nous utiliserons, dans ce cas, est le carré scalaire de la quadri-impulsion de la particule V.

II - DECOMPOSITION ANALYTIQUE DES BOUCLES DE SELF-ENERGIE.

La boucle de self-énergie Σ est, généralement, une fonction de l'espace de phase ρ . Nous allons dans ce paragraphe, montrer qu'on peut décomposer Σ en la somme d'une fonction de ρ^2 (que nous appellerons partie paire) et d'une fonction impaire en ρ ; ces deux fonctions analytiques de s coïncident respectivement avec les parties réelle et imaginaire de la boucle sur la coupure de droite.

II.1 - Boucle du modèle galiléen.

Elle s'exprime, comme nous l'avons vu, au moyen de l'intégrale divergente(*) :

$$\Sigma(s \pm i\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{\sqrt{s'-s_0}\, ds'}{s'-s \mp i\varepsilon} \qquad (7)$$

s_0 étant le carré de l'énergie du seuil.

Posons :

$$k(s) = \sqrt{s-s_0} \ .$$

De (7) on tire :

$$\Sigma(s+i\varepsilon) - \Sigma(s-i\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} ds'\, k(s') \left[\frac{1}{s'-s-i\varepsilon} - \frac{1}{s'-s+i\varepsilon} \right] . \qquad (8)$$

Le terme entre crochets dans (8) est égal à :

$$f(s'-s,\varepsilon) = \frac{2i\varepsilon}{(s'-s)^2+\varepsilon^2} \ .$$

Par suite l'intégrale (8) est convergente et, comme :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{2i\varepsilon}{(s'-s)^2+\varepsilon^2} = 2i\,\delta(s'-s) \ ,$$

(*) Nous négligeons ici un facteur de normalisation qui a les dimensions d'une masse. Nos conclusions sont évidemment indépendantes de cette normalisation.

on a :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\Sigma (s+i\varepsilon) - \Sigma(s+i\varepsilon) \right] = \begin{cases} 2ik & \text{si } s \geq s_0 \\ 0 & \text{si } s \leq s_0 . \end{cases} \qquad (9)$$

Si on considère l'expression :

$$\Sigma (s+i\varepsilon) + \Sigma (s-i\varepsilon) = 2\beta_0(s) \quad , \qquad (10)$$

on voit, en utilisant (7), qu'elle est donnée par une intégrale divergente. En effectuant une soustraction en un point quelconque α et en intégrant par la méthode des résidus, on trouve :

$$\beta_0(s) = \beta_0(\alpha) \qquad (11)$$

et, par suite, $\beta_0(s)$ se réduit à une constante (infinie).

De (9), (10) et (11) on tire alors :

$$\Sigma (s) = C_\infty + ik \qquad (12)$$

qui est bien le résultat annoncé : la boucle se décompose en une fonction de k^2 (qui est une constante infinie), et en une fonction impaire de k. Il est aussi clair que la décomposition analytique (12) (puisque toutes les fonctions y sont analytiques) coïncident pour $s > s_0$ et réel, avec la décomposition habituelle en partie réelle et imaginaire.

II.2 - Boucle du modèle de Zachariasen.

On sait que la boucle de self-énergie, dans ce modèle, est définie par l'intégrale suivante[2] :

$$\Sigma (s \pm i\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \sqrt{\frac{s'-s_0}{s'}} \, \frac{ds'}{s'-s \mp i\varepsilon} \qquad (13)$$

qui diverge logarithmiquement, c'est-à-dire que la boucle soustraite une fois (ce qui fait apparaître une constante infinie) est convergente. La décomposition de la boucle (13) s'obtient en intégrant par résidus :

$$\Sigma (s) = C_\infty - \frac{1}{\pi} \operatorname{Log} \frac{1+\rho}{1-\rho} + i\rho \quad , \qquad (14)$$

où

$$\rho = \left(\frac{s - s_0}{s}\right)^{1/2} \qquad (s_0 = \text{énergie carrée du seuil}).$$

Il est clair que (14) est bien une décomposition analytique en une fonction paire de ρ :

$$\beta_0 = C_\infty - \frac{1}{\pi}\,\rho\,\mathrm{Log}\,\frac{1-\rho}{1+\rho} \qquad (15)$$

et en une fonction impaire :

$$\beta_1 = \rho \qquad (16)$$

avec :

$$\Sigma = \beta_0 + i\,\beta_1 \quad .$$

Il est également clair que β_0 et β_1 coïncident avec les parties réelle et imaginaire de $\Sigma(s)$ pour $s > s_0$.

II.3 - La boucle du modèle de Lee.

Si on pose :

$$k = (s - s_0)^{1/2}$$

où s_0 est l'énergie carrée du seuil, la boucle du modèle de Lee est donnée par :

$$\Sigma(s \pm i\varepsilon) = \frac{1}{\pi}\int_{s_0}^{\infty} \frac{k(s')\,f^2(s')}{s' - s \mp i\varepsilon}\,ds' \quad , \qquad (17)$$

où f^2 est la fonction de cut-off. Comme il n'existe pas de prescription théorique pour le choix de cette fonction, il va en résulter un certain arbitraire dans la structure mathématique de la boucle de self-énergie.

En pratique, il est souhaitable de choisir :

$$f^2(s) \equiv g(k^2) \qquad (18)$$

c'est-à-dire un cut-off qui soit fonction uniforme de s. Si cette prescription n'est pas suivie, on peut montrer que les pôles de l'amplitude sont -à une voie

déjà- solution d'une équation en k à coefficients complexes, et avec de tels "cut-off", on ne pourrait obtenir des structures en résonances, états liés ou virtuels(*).

Pour fixer les idées, choisissons le cut-off le plus simple correspondant à cette prescription :

$$g(k^2) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + k^2} \qquad (19)$$

où α est le paramètre de cut-off. L'expression (19) a l'avantage de restituer, à la limite $\alpha \to \infty$, le modèle galiléen. Il est facile de trouver que (17) donne avec (19) :

$$\Sigma(s) = \frac{\alpha^3}{\alpha^2 + k^2} + i k \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + k^2} \quad , \qquad (20)$$

en intégrant par résidus. Evidemment (20) a aussi la propriété annoncée.

II.4 - Intérêt de la décomposition analytique des boucles.

Les particules instables étant, comme nous l'avons dit, traitées comme les singularités du propagateur dans les feuillets non physiques, il faut construire les prolongements analytiques sur l'ensemble de la surface de Riemann. La décomposition analytique des boucles, en nous permettant d'introduire la prescription de changement de feuillet :

$$k \to -k \quad , \qquad (21)$$

va nous permettre de donner une prescription unique pour obtenir tous les opérateurs dans les feuillets non physiques. Une telle règle est, de plus, bien plus simple que celles couramment utilisées(7)(8) qui, elles, nécessitent

---

(*) A une voie ceux-ci sont définis par un pôle sur l'axe $Im(k) > 0$ (état lié) ou $Im(k) < 0$ (état virtuel), ou, dans le feuillet non physique, deux pôles symétriques par rapport à l'axe $Im(k)$ (résonance). De telles configurations sont impossibles si f^2 n'est pas fonction uniforme de s.

autant de prescriptions qu'il y a de fonctions à prolonger (vertex, propagateur...). La connaissance de la fonction D, jointe à la prescription (21), nous permettra de déduire les fonctions B_λ de la matrice K qui sont essentielles pour la construction des modèles phénoménologiques qu'on engendre avec des modèles de théorie des champs.

III - LOIS DE DEGRES DANS LES MODELES SANS VOIE CROISEE.

La notion de loi de degré, dont nous avons vu qu'elle est une des caractéristiques d'un modèle phénoménologique, se réfère explicitement à des modèles rationnels. Parmi les modèles que nous étudions, seuls celui de Lee et le modèle galiléen peuvent avoir (ou ont) cette forme. En raison de l'arbitraire sur la forme du cut-off il est plus rigoureux et général de s'intéresser aux lois de degré du modèle galiléen qui n'introduit pas de polynôme arbitraire dû au cut-off.

Pour le modèle de Zachariasen la notion de loi de degré s'applique exactement à la partie polynomiale des fonctions B_λ de ce modèle ; celle -ci coïncide d'ailleurs directement avec la fonction B_λ complète du modèle galiléen correspondant.

III.1 - Principe de la méthode examiné dans des cas particuliers.

1 - Fonction D et lois de degrés.

On peut partir du hamiltonien d'un modèle galiléen, le résoudre et chercher la forme analytique de l'amplitude correspondant aux interactions introduites dans ce modèle(*). Cependant, comme on sait que l'amplitude ainsi obtenue peut être déduite directement de la série de perturbation, on peut montrer qu'elle est solution algébrique d'une équation itérative (voir par ex. réf. (11)). Par exemple, si l'interaction introduite est(**) :

$$\Lambda_0 = \lambda_0 \qquad \text{(interaction de contact)},$$

ou $$\Lambda_0 = (g\tilde{g})\Delta_0 \qquad \text{(échange d'une particule de masse } \mu_0\text{)},$$

ou $$\Lambda_0 = (g\tilde{g})\Delta_0 + \lambda_0 \qquad \text{(superposition des deux)},$$

(22)

avec :

$$\Delta_0 = \frac{1}{\Delta - \mu_0^2} \quad ,$$

(*) Voir par ex. réf. (12) pour l'écriture d'un hamiltonien dans le cas à plusieurs voies.

(**) Λ_0 est toujours une matrice dans l'espace des voies et Δ_0 est un scalaire ; l'écriture matricielle explicite ne pose aucun problème.

on peut vérifier, quel que soit le nombre de voies du problème, que l'amplitude est solution de[11] :

$$T = \Lambda_0 + \Lambda_0 \Sigma T \qquad (23)$$

où :

- Σ est la matrice diagonale des boucles de self-énergie de chaque voie :

$$\Sigma_{ij} = \Sigma_i \delta_{ij} \quad ; \quad \Sigma_i(s) = \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{\rho_i(s')}{s'-s} ds'$$

- g est le vecteur des constantes de couplage nues de la particule V aux voies $(N_i\ \theta_i)$.

Dans le cas d'une seule voie l'expression (23) ci-dessus est une expression reliant trois fonctions scalaires, et T s'écrit :

$$T = \frac{\Lambda_0}{1 - \Lambda_0 \Sigma} \quad .$$

Dans le cas général l'amplitude est déterminée par le formalisme D/D, la fonction D étant :

$$D = \mathrm{Det}\,[1 - \Lambda_0 \Sigma] \quad , \qquad (24)$$

à une fonction multiplicative uniforme de s près ; cette fonction peut être choisie de façon à éliminer dans (24) les "faux pôles" qui disparaitraient par quotient dans l'amplitude. Ceci correspond précisément à l'élimination du paradoxe de Federbush[17](*).

Dans le cas de deux voies, les fonctions D correspondant aux trois interactions (22), sont données respectivement par :

(*) Ce que nous appelons paradoxe de Federbush ("Federbush disease"[17]) traduit la présence dans les diverses déterminations de D de zéros et pôles qui ne produisent aucune singularité dans l'amplitude (ils disparaissent par quotient). Nous montrerons tout au long de ce chapitre qu'une méthode simple peut être employée pour éliminer de telles singularités.

$$\begin{cases} D = 1 - (\lambda_0)_{11}\Sigma_1 - (\lambda_0)_{22}\Sigma_2 + (\det\lambda_0)\,\Sigma_1\Sigma_2 \\ D = 1 - g_1^2\Sigma_1\Delta_0 - g_2^2\Sigma_2\Delta_0 \\ D = 1 - \left[(\lambda_0)_{11} + g_1^2\Delta_0\right]\Sigma_1 - \left[(\lambda_0)_{22} + g_2^2\Delta_0\right]\Sigma_2 + \left[\det\lambda_0 + \Delta_0\left[(\lambda_0)_{11}g_2^2 + (\lambda_0)_{22}g_1^2 - 2(\lambda_0)_{12}g_1g_2\right]\right]\Sigma_1\Sigma_2 \end{cases} \qquad (25)$$

Les fonctions D dans (25) qui n'ont plus de "faux pôles" sont :

. la première, telle qu'elle se trouve dans (18),

. la seconde et la troisième multipliées par Δ_0 .

Si l'on suppose le modèle galiléen, nous avons vu qu'il y a une décomposition en partie paire et impaire en k, dont la première se réduit à une constante (infinie). En utilisant cette remarque dans (25), on peut regrouper tous les termes de telle façon que D -à deux voies- prenne la forme :

$$D_0 = B_0 - ik_1B_1 - ik_2B_2 - k_1k_2B_3 \quad . \qquad (26)$$

Un calcul algébrique simple donne les lois de degrés correspondant aux intéractions (22). Nous les réunissons dans le tableau suivant(*) :

Λ_0	λ_0	$g\tilde{g}\,\Delta_0$	$\lambda_0 + g\tilde{g}\Delta_0$
$d^\circ B_0$	0	1	1
$d^\circ B_1$	0	0	1
$d^\circ B_2$	0	0	1
$d^\circ B_3$	0	-1	1

Tableau I

(*) Pour simplifier on notera -1 le degré d'un "polynôme" identiquement nul.

En comparant aux résultats du chapitre VI , on voit que λ_0 correspond au modèle (ZR) de Ross et Shaw et $g\tilde{g}\Delta_0$ au modèle (BW). La superposition de ces deux interactions donne lieu à une loi de degré d'un modèle phénoménologique, non utilisé à notre connaissance.

2 - "Renormalisation".

Nous avons vu au paragraphe II ci-dessus que (sauf dans le cadre du modèle de Lee) les expressions analytiques des boucles de self-énergie contiennent des constantes infinies. Comme l'expression (25) le montre, la fonction D a donc des "coefficients" infinis ; par suite les lois de degré que nous avons données au tableau I n'ont pas, a priori, un sens. Nous verrons cependant que, de façon générale, on peut définir un procédé de renormalisation tel que l'expressinn de la fonction D, comme les lois de degré, aient un sens. Nous verrons même que, dans cette renormalisation, les lois de degré se conservent. Jusque là, on peut considérer les calculs qui suivent comme des manipulations formelles qui recevront un sens grâce aux conclusions du paragraphe IV.

La méthode que nous employons pour renormaliser diffère de la méthode classique [11][18] : au lieu de renormaliser les pôles de l'amplitude, nous procédons à la renormalisation des coefficients des fonctions D ; ceci revient au même, mais permet un traitement analytique plus simple. Un tel procédé est plus proche de ce qui est connu sous le nom de "régularisation"(*), que la renormalisation (au sens admis).

A titre d'exemple, nous allons montrer le procédé sur la seconde fonction D dans (25). En utilisant la boucle galiléenne décomposée, nous avons :

$$D = (s - \mu_0^2) - g_1^2 (C_1^\infty + i k_1) - g_2^2 (C_2^\infty + i k_2) \quad ; \qquad (27)$$

pour que (27) ait un sens, la masse nue μ_0 doit être infinie, et on dira que :

$$\mu^2 = \mu_0^2 + g_1^2 C_1^\infty + g_2^2 C_2^\infty \qquad (28)$$

(*) voir par ex. réf. (13).

est un paramètre fini[*]. Ceci peut très évidemment être déduit d'une condition imposée à l'amplitude (une constante finie supplémentaire qui apparaît dans le membre de droite de (28), ne change rien au sens de cette équation). La fonction D régularisée s'écrit alors :

$$D = s - \mu^2 - i g_1^2 k_1 - i g_2^2 k_2 , \qquad (29)$$

qui a la même forme que (27). Donc la loi de degré se conserve ; on peut faire la même chose avec les deux autres fonctions (25), où apparaît une constante multiplicative infinie qui est éliminée par quotient (quand on écrit D/D).

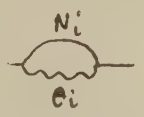
Les paragraphes qui suivent contiennent l'extension de ce que nous venons de dire à toute interaction du type (22). De l'équation itérative générale, nous déduirons la fonction D et les lois de degrés ; nous verrons après, que les lois de degré se conservent dans la renormalisation.

III.2 - Equation itérative de T et fonction D.

Dans le cadre du problème à n voies, l'amplitude, comme la matrice, se déduit de l'équation itérative :[11]

$$T = \Lambda_0 + \Lambda_0 \Sigma T , \qquad (30)$$

où Σ est la matrice diagonale des boucles de chaque voie :

$\Sigma_i =$ 

,

qui peut être mise sous la forme d'une somme d'une matrice fonction des k_i^2 et d'une matrice fonction des variables k_i. La première fonction est uniforme dans la variable s, la seconde (impaire) est multiforme[**].

(*) Si on traite un résonance, cela revient à renormaliser au point où la phase de T passe par $\pi/2$ (ce point est le pôle de K dans le cas d'une seule voie).

(**) Nous appelons et appellerons dans la suite, matrice paire et matrice impaire, les matrices constituées respectivement par les parties paires des boucles (fonction de k_i^2) et les parties impaires des boucles (fonction impaire de k_i).

La matrice Λ_0 dans (30) est l'une des trois interactions générales

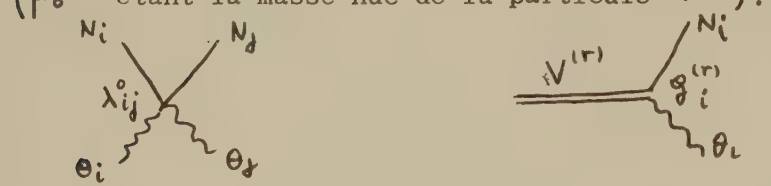
$$\begin{cases} \Lambda_0 = \lambda_0 & : \text{interaction de contact} \\ \Lambda_0 = \sum_{r=1}^{m} g^{(r)} \Delta_0^{(r)} \tilde{g}^{(r)} & : \text{échange de m particules} \\ \Lambda_0 = \lambda_0 + \sum_{r=1}^{m} g^{(r)} \Delta_0^{(r)} \tilde{g}^{(r)} & : \text{superposition des deux précédentes} \end{cases} \tag{31}$$

la première interaction (31) est classique. La seconde a, par exemple, été étudiée, dans une voie, par Houard et Le Guillou[18]. La seconde et la troisième, pour le cas d'une particule, ont été renormalisées par Rajasekaran[12] dans n voies avec un cut-off.

Si on appelle N_i et θ_i les particules de la voie i, les deux graphiques qui suivent précisent les notations dans (31), les particules <u>échangées</u> $V^{(r)}$ ayant pour propagateur nu :

$$\Delta_0^{(r)} = \frac{1}{s - [\mu_0^{(r)}]^2} \quad , \tag{32}$$

($\mu_0^{(r)}$ étant la masse nue de la particule $V^{(r)}$).



Les matrices Λ_0 sont des matrices dans l'espace des voies. Pour toute particule $V^{(r)}$, $g^{(r)}$ et $\tilde{g}^{(r)}$ sont les vecteurs (resp. colonne et ligne) des constantes de couplage <u>nues</u> de $V^{(r)}$ à l'ensemble des voies.

Du point de vue mathématique $g_i^{(r)}$ peut être considéré comme un tenseur dont un indice (i) agit dans l'espace des voies et l'autre (r) dans l'espace des particules. Si on définit la matrice carrée Δ_0 (dans l'espace des particules) par :

$$(\Delta_0)_{rr'} = \Delta_0^{(r)} \delta_{rr'} \quad ,$$

la somme dans (31) s'écrit :

$$\sum_{r=1}^{m} g^{(r)} \Delta_0^{(r)} \tilde{g}^{(r)} \equiv g \Delta_0 \tilde{g} \quad ,$$

la sommation implicite sur les indices de la matrice intermédiaire (ici Δ_0), définit la somme comme une <u>matrice dans l'espace des voies</u>.

De l'expression (30) on déduit la forme de la fonction D associée à T pour une interaction nue (31) :

$$D_{nue} = \mathrm{Det}\,[1 - \Lambda_0 \Sigma] \tag{33}$$

On sait (voir ch. II) que la fonction D est définie à une fonction uniforme f(s) près. Cette fonction arbitraire va jouer ici un rôle important, en relation avec le paradoxe de Federbush[17]. Pour des raisons que nous avons expliquées au chapitre II, les "faux pôles" ne peuvent intervenir que sous la forme d'une fonction uniforme de s, polynôme dénominateur dans (33). Il est facile de vérifier que ces "faux pôles" proviennent du dénominateur de Λ_0. La règle d'élimination du paradoxe de Federbush est donc simple : il suffit de multiplier D par le polynôme dénominateur P(s) commun aux fonctions B_λ du développement[(*)] de (33) :

$$\mathcal{D} = P(s)\, D_{mue} \,. \qquad (34)$$

Les lois de degré seront données pour les fonctions D "non paradoxales".

III.3 - Lois de degré des modèles phénoménologiques.

La relation (33) :

$$D_{mue} = \mathrm{Det}\,[1 - \Lambda_0 \Sigma] \,,$$

appliquée aux différents types possibles d'interaction (31), va nous donner les lois de degré du modèle galiléen[(**)]. Le principe de la déduction est simple ; il consiste en une application en cascade du développement d'un déterminant du type :

$$\mathrm{Det}\,[1 - C] \qquad (35)$$

(*) Le développement de $\mathrm{Det}\,[1 \pm A]$ a été démontré à l'appendice F :

$$\mathrm{Det}\,[1 \pm A] = 1 \pm \mathrm{Tr}A + (\pm)^2 \sum_{2\times 2} \mathrm{Det}_2 A + \cdots + (\pm)^n \mathrm{Det}_n A$$

où $\sum_{m\times m}$ signifie somme sur tous les déterminants diagonaux d'ordre m.

(**) Ou de la partie polynomiale, si on travaille avec le modèle de Zachariasen.

III.3.1 - Interaction de contact seule.

La relation (3^3) s'écrit ici :

$$D = \mathrm{Det}\,[1 - \lambda_0 \Sigma] \qquad (36)$$

où λ_0 est la matrice du couplage de contact.

Dans le cadre du modèle galiléen, la matrice boucle Σ est la somme d'une matrice constante infinie et de la matrice ik :

$$(ik)_{\ell m} = (ik)_\ell \, \delta_{\ell m} ,$$

où k_ℓ est l'espace de phase dans la voie ℓ. En appliquant la règle du développement des déterminants à (36), il vient immédiatement :

$$d^\circ B_\mu = 0 \qquad \forall M \in \mathcal{G}(N)$$

et par suite, l'interaction de contact correspond au modèle "zéro range" de Ross et Shaw (ZR).

III.3.2 - Echange d'une particule.

La relation (33) donne, pour cette interaction :

$$D = \mathrm{Det}\,[1 - \Delta_0 \, g\tilde{g}\Sigma] \quad , \qquad (37)$$

où g est la matrice colonne des constantes de couplage de la particule aux voies, et $\tilde{g}$ le vecteur ligne correspondant.

L'écriture $g\tilde{g}$ permet de considérer ce produit tensoriel comme une matrice carrée de rang 1. Par suite (37) s'écrit(*) :

$$D = 1 - \tilde{g}\Sigma g \; \Delta_0 \quad . \qquad (38)$$

Pour obtenir le modèle rationnel correspondant, on joue sur le fait que D est définie à une fonction uniforme de s près. Posons :

(*) $g\tilde{g}$ étant une matrice de rang 1, la trace de $g\tilde{g}\Sigma$ est :

$$\mathrm{Tr}\,[g\tilde{g}\Sigma] = \tilde{g}\Sigma g ,$$

où le second membre est entendu au sens du produit habituel en théorie des matrices.

$$f(s) = \Delta_o^{-1} \quad .$$

La loi de degré des B associée à :

$$\mathcal{D} = f(s) D \quad ,$$

est évidemment donnée par :

$$\begin{cases} d^\circ B_o = 1 \\ d^\circ B_i = 0 & \forall i \in N \\ d^\circ B_\mu = -1 & \forall m = \mathrm{Card}(M) \geq 2 \end{cases} \tag{39}$$

(un polynôme de degré négatif étant, par définition, identiquement nul).

En comparant (39) aux lois de degré des modèles phénoménologiques du ch. VI , il est clair que l'échange d'une seule particule correspond à la loi de degré du modèle de Breit-Wigner (BW) ou (WLC) (condition faible de Levinson) avec c = 1.

III.3.3 - Echange de m particules.

La fonction D associée à ce cas s'écrit :

$$D = \mathrm{Det}\left[1 - \left(\sum_{r=1}^{m} g^{(r)} \Delta_o^{(r)} \tilde{g}^{(r)} \right) \Sigma \right] \quad ; \tag{40}$$

$\Delta_o^{(r)}$ est, pour chaque r , un scalaire, $g^{(r)}$ et $\tilde{g}^{(r)}$ sont les vecteurs (resp. colonne et ligne) des constantes de couplage de la particule r aux voies. En raison même de la définition de l'échange d'une particule, on a :

$$\mathrm{rang}\left[(g^{(r)} \tilde{g}^{(r)}) \right] = 1 \qquad \forall r = 1, \ldots, m$$

et par suite, en général :

$$\mathrm{rang}\left[\sum_{r=1}^{m} \Delta_c^{(r)} (g^{(r)} \tilde{g}^{(r)}) \right] = m \quad .$$

Donc, les derniers termes non nuls dans la série associée (40) par la règle du développement des déterminants sont:

$$\begin{cases} (\mathrm{Det}_m \Sigma)\left(\mathrm{Det}_m \left[\sum_{r=1}^{m} \Delta_o^{(r)} (g^{(r)} \tilde{g}^{(r)}) \right] \right) \\ \forall M \in \mathfrak{F}(N) : \quad m = \mathrm{Card}(M) \leq n \end{cases} \tag{41}$$

et le dénominateur commun auquel peuvent être réduits tous les termes de la série est :

$$\prod_{r=1}^{m} \left[\Delta_0^{(r)}\right]^{-1} .$$

La loi de degré de ce modèle est alors :

$$\begin{cases} d^\circ B_0 = m \\ d^\circ B_\lambda = m - \ell \qquad \forall L \in \mathcal{P}(N) \end{cases} \tag{42}$$

(Avec la convention qu'un polynôme de degré négatif est identiquement nul).

Ces modèles ont plusieurs analogues phénoménologiques :

. Si m est quelconque (42) est la loi de degré (WLC)(pour la fonction de poids k_i).

. Si m = n (n est le nombre de voies, (42) correspond au modèle de portée effective de Ross et Shaw).

Si l'on impose à :

$$\sum_{r=1}^{m} g^{(r)} \Delta_0^{(r)} \tilde{g}^{(r)},$$

d'être de rang 1, donc si :

$$\frac{g_i^{(r)}}{g_i^{(r')}} = \frac{g_k^{(r)}}{g_k^{(r')}} \qquad \forall i,k \in N \text{ et } r,r' = 1,\dots,m$$

(ce qui revient à dire que les constantes de couplage de $V^{(r)}$ et $V^{(r')}$ aux voies sont proportionnelles), on obtient le modèle BW :

$$\begin{cases} d^\circ B_0 = m \\ d^\circ B_i = m-1 \\ d^\circ B_\mu = -1 \end{cases} \qquad \forall m = \mathrm{Card}(M) \geq 2 \,, M \in \mathcal{P}(N)$$

III.3.4 - Echange d'une particule et interaction de contact.

La fonction D associée à cette interaction nue s'écrit :

$$D = \mathrm{Det}\left[1 - (\lambda_0 + g\tilde{g}\Delta_0)\Sigma\right] . \tag{43}$$

Pour simplifier, nous allons supposer que λ^{-1} existe :

$$\mathrm{rang}(\lambda) = n .$$

La détermination de la loi de degré qui correspond à la fonction (43) est moins simple à déduire que dans les cas précédents. Il faut, en effet, appliquer deux fois la règle de développement des déterminants sur chaque terme de la décomposition associée à (43).

Nous n'allons pas donner ici le procédé général mais, uniquement, le cas de deux voies (on verra que l'extension pour n voies est évidente).

Dans le cas de deux voies la décomposition de (43) donne :

$$D = 1 - \mathrm{Tr}\left[(\lambda_0 + g\tilde{g}\Delta_0)\Sigma\right] + \mathrm{Det}\left[\Sigma(\lambda_0 + g\tilde{g}\Delta_0)\right]$$

comme λ^{-1} existe :

$$D = 1 - \mathrm{Tr}\left[(\lambda_0 + g\tilde{g}\Delta_0)\Sigma\right] + \mathrm{Det}(\lambda_0\Sigma).\ \mathrm{Det}\left[1 + g\tilde{g}\Delta_0\lambda_0^{-1}\right]; \tag{44}$$

puisque :

$$\mathrm{rang}\left[(g\tilde{g})\right] = 1,$$

le dernier terme se réduit à :

$$1 + \Delta_0\ \mathrm{Tr}\left[(g\tilde{g})\lambda_0^{-1}\right] .$$

Par suite :

$$D = 1 - \mathrm{Tr}\left[(\lambda_0 + g\tilde{g}\Delta_0)\Sigma\right] + \left[1 + \Delta_0\ \mathrm{Tr}\left[(g\tilde{g})\lambda_0^{-1}\right]\right] \mathrm{Det}\lambda\ \Sigma_1\Sigma_2 \tag{45}$$

la loi de degré est alors :

$$d^\circ B_0 = d^\circ B_1 = d^\circ B_2 = d^\circ B_3 = 1\ ,$$

et la généralisation à n voies est évidente sur (45) ; la loi de degré correspondant à l'échange d'une particule et à une interaction de contact superposée est :

$$d^\circ B_\mu = 1 \qquad \forall M \in \mathcal{B}(N) \tag{46}$$

III.3.5 - Echange de m particules et interaction de contact.

Nous n'allons pas, ici, expliciter les calculs qui sont une généralisation immédiate du cas précédent. En supposant, pour simplifier, que :

$$\text{rang } \lambda_0 = n$$

le développement de la fonction D :

$$D = \text{Det}\left[1 - \left(\lambda_0 + \sum_{r=1}^{m} g^{(r)} \Delta_0^{(r)} \tilde{g}^{(r)}\right)\Sigma\right] \equiv \text{Det}\left[1 - (\lambda_0 + g \Delta_0 \tilde{g})\Sigma\right], \tag{47}$$

conduit, pour deux voies, à :

$$D = 1 - \text{Tr}\left[\Sigma\left(\lambda_0 + g \Delta_0 \tilde{g}\right)\right] + \text{Det}\,\lambda\Sigma \;\; \text{Det}\left[1 + \lambda^{-1}\left(g \Delta_0 \tilde{g}\right)\right]$$

qui se développe en fonctions B, donne les relations :

$$d^0 B_0 = d^0 B_1 = d^0 B_2 = d^0 B_3 = m \quad .$$

Comme la précédente, cette loi de degré ne caractérise pas un modèle phénoménologique rationnel utilisé. Pour le cas général de n voies on peut démontrer que :

$$d^0 B_\lambda = m \qquad , \quad \forall L \in \mathcal{P}(N) \; . \tag{48}$$

III.3.6 - Remarque.

Nous avons pu trouver, en termes d'interactions en théorie des champs, la signification physique des modèles rationnels que nous analysions au chapitre VI . Il est apparu ainsi qu'ils se rattachent tous :

. Soit à une interaction de contact,

. Soit à l'échange d'une (ou plusieurs) particule(s).

A notre connaissance, aucun modèle phénoménologique correspondant à la superposition de ces deux types d'interactions n'a été introduite (lois de degré (48)).

Le sens physique attaché désormais à chacun des modèles rationnels permet de mieux saisir le sens de l'inéquivalence de modèles, dont nous avons commencé l'étude au chapitre VI : deux modèles sont inéquivalents s'ils correspondent à des interactions différentes, que la différence provienne du type d'interaction (contact ou échange) ou du "nombre d'interactions" (nombre de particules échangées).

L'ensemble des modèles simples de théorie des champs ne donne pas un sens physique à toute loi de degré. Par exemple, le modèle :

$$d^\circ B_0 = 1 \ , \quad d^\circ B_1 = d^\circ B_2 = d^\circ B_3 = 0 \ , \quad B_3 \neq 0 \ ,$$

qui n'est qu'une formule de Breit-Wigner "modifiée" ne peut être généralement construite. Elle ne peut apparaître que comme cas particulier (annulation de certains paramètres) de l'un des modèles que nous venons de voir.

IV - CONSERVATION DES LOIS DE DEGRE DANS LA RENORMALISATION.

Nous avons signalé au paragraphe précédent que les modèles considérés contenaient des paramètres infinis, provenant de la divergence des boucles de self-énergie. Par suite, pour que les modèles que nous avons contruit et les lois de degré qui y correspondent aient un sens, il nous faut montrer que, dans une renormalisation, ces lois de degré se conservent. Nous donnons en appendice I la démonstration générale ; ici, nous nous contenterons d'examiner certains cas particuliers qui font bien apparaître les structures générales. Nous devons pour la clarté de l'exposé, préciser d'abord quelques notations :

- On appellera A, une matrice constante infinie, telle que :

$$\Sigma - A$$

soit une matrice finie pour tout s fini $\left(\rho_i = k_i\right)$ ou non nul $\left(\rho_i = \sqrt{\frac{s - s_i}{s}}\right)$

- On notera Λ l'interaction "renormalisée" de masse (et, quand c'est nécessaire, de vertex) ; on va voir que la matrice T renormalisée vérifie alors l'équation :

$$T = \Lambda + \Lambda (\Sigma - A) T \qquad (49)$$

- La fonction D correspondant à l'amplitude "renormalisée" est :

$$D_{Ren} = \mathrm{Det}\left[1 - \Lambda(\Sigma - A)\right] \ , \qquad (50)$$

à une fonction uniforme de s près.

Comme les relations (49) et (50) ont la même forme analytique que leurs homologues exprimées en termes des grandeurs nues (éq. (30) et (33)) et que c'est de celle-ci qu'on déduit les lois de degré, on peut dire : les lois de degré se conservent dans la renormalisation. Cette conclusion est établie généralement en appendice I, ici nous la montrerons dans deux cas particuliers :

- une particule échangée,

- Interaction de contact superposée à l'échange d'une seule particule;

Ces deux cas nous servirons de points d'appui dans la suite, notamment dans l'étude des propriétés de la matrice K.

IV.1 - Une particule échangée.

L'équation itérative donnant T s'écrit :

$$T = g\tilde{g}\,\Delta_0 + \Delta_0\,(g\tilde{g})\,\Sigma\,T \qquad (51)$$

où $g\tilde{g}$ est traitée comme une matrice carrée de dimension n et de rang 1. En itérant l'équation (51), il est facile de trouver que la somme donnant T s'écrit :

$$T = g\,[\Delta_0^{-1} - \tilde{g}\,\Sigma\,g]^{-1}\,\tilde{g}\ . \qquad (52)$$

Le crochet central est un scalaire puisque :

$$\tilde{g}\,\Sigma\,g = Tr\,[\Sigma\,(g\tilde{g})]\ .$$

Posons :

$$\Delta_0^{-1} = s - \mu_0^2 \quad , \quad \mu_0^2 = \mu^2 - \delta\mu^2 \quad , \quad \Delta^{-1} = s - \mu^2, \qquad (53)$$

où :

. μ_0^2 est le carré de la masse nue (infinie) de la particule V,

. $\delta\mu^2$ le contreterme de renormalisation de masse (infini),

. μ^2 est une constante finie ayant les dimensions du carré d'une masse.

Le principe de cette "renormalisation" consiste à dire que le crochet dans (52) est fini ; c'est en ce sens une régularisation mais c'est aussi une renormalisation puisque ce résultat peut être obtenu par une condition sur le propagateur habillé $\underline{\Delta}$:

$$\underline{\Delta}^{-1} = \Delta_0^{-1} - \tilde{g}\,\Sigma\, g \,,$$

qui est, par exemple, la condition :

$$\underline{\Delta}^{-1}(\Delta = 0) = -\mu^2$$

ce qui revient à poser :

$$\delta\mu^2 = \tilde{g} A g \qquad \text{avec} \qquad A \equiv \Sigma\,(\Delta = 0) \,. \tag{54}$$

En portant (54) dans (52) compte tenu de (53), il est facile de déduire :

$$T = g\left[\Delta^{-1} - \tilde{g}\,(\Sigma - A)\,g\right]^{-1}\tilde{g} \,. \tag{55}$$

En comparant (52) à (55), il est clair que le résultat annoncé est vérifié : la forme analytique de T se conserve dans la renormalisation si on fait la transposition :

$$\begin{cases} \mu_0^2 \longrightarrow \mu^2 \\ \Sigma \longrightarrow \Sigma - A \,. \end{cases}$$

La fonction D "non paradoxale" s'écrit alors en termes des grandeurs nues, ou renormalisées en masse :

$$\begin{cases} D_{nue} = \mathrm{Det}\left[\Delta_0^{-1} - \tilde{g}\,\Sigma\, g\right] \\ D_{Ren} = \mathrm{Det}\left[\Delta^{-1} - \tilde{g}\,(\Sigma - A)\,g\right] \,. \end{cases} \tag{56}$$

Si on porte (52) dans (56) il est aisé de vérifier que :

$$D_{nue} = D_{Ren} \,, \tag{57}$$

donc que la fonction D utilisée ne contient pas de "faux" pôles, qu'elle soit exprimée en termes des grandeurs nues ou renormalisée en masse. Pour le cas de deux voies, la fonction D a été donnée au § III.1. Remarquons que, dans ces théories, la constante de couplage nue étant finie, on n'a pas à effectuer (à ce stade) la renormalisation en Z_3.

IV. 2 - Echange d'une particule superposée à une interaction de contact.

Le cas de plusieurs particules, lorsque se superpose une interaction de contact, est algébriquement compliqué, mais il conduit au même résultat final que pour une particule.

L'équation matricielle dont l'amplitude est solution s'écrit :

$$T = \lambda_0 + \Delta_0\, g\tilde{g} + (\lambda_0 + \Delta_0\, g\tilde{g})\,\Sigma\, T \quad , \qquad (58)$$

pour chacune des boucles du paragraphe II.

Δ_0 est le propagateur nu de la particule échangée V, les autres grandeurs sont conformes aux définitions précédentes. (Nous rappelons seulement que g est le vecteur des constantes de couplage nues aux voies).

A une fonction f(s) uniforme près, la fonction D "nue" associée à (58) s'écrit :

$$D_{nue} = Det\left[1 - (\lambda_0 + g\tilde{g}\,\Delta_0)\Sigma\right] . \qquad (59)$$

Pour renormaliser (58) (donc aussi (59)), nous allons utiliser la décomposition de Lee et al[9], dans le cas de plusieurs voies. C'est ainsi que nous allons écrire :

$$T = T_1 + T_2$$

où T_1 est l'interaction de contact habillée, et T_2 la partie réductible de l'amplitude, qui contient le propagateur habillé ; nous renormaliserons T_1 et T_2 séparément.

IV.2.1 - Le contact habillé.

T_1 vérifie l'équation :

$$T_1 = \lambda_0 + \lambda_0 \Sigma\, T_1 \quad , \qquad (60)$$

donc :

$$T_1 = (1 - \lambda_0 \Sigma)^{-1} \lambda_0 \,. \tag{61}$$

On impose à T_1 de vérifier la condition :

$$T_1(\mu^2) = \lambda \tag{62}$$

en un point μ^2 réel qu'il importe peu ici de préciser. Posons :

$$\Sigma(\mu^2) = A \tag{63}$$

En imposant (62) dans (61), avec (63), on tire :

$$T_1 = \left[1 - \lambda (\Sigma - A) \right]^{-1} \lambda \,. \tag{64}$$

La comparaison de (61) et (64) montre qu'il y a conservation de la forme de T_1 dans la transposition(*) :

$$\begin{aligned} \lambda_0 &\longrightarrow \lambda \\ \Sigma &\longrightarrow \Sigma - A \end{aligned} \tag{65}$$

IV.2.2. - La matrice de vertex.

On définit le vertex habillé non renormalisé par la série matricielle de perturbation :

$$\Gamma_0 = 1 + \lambda_0 \Sigma + (\lambda_0 \Sigma)^2 + \dots = (1 - \lambda_0 \Sigma)^{-1} \,. \tag{66}$$

Le vertex renormalisé Γ est défini par la propriété au point μ^2 de (62) :

$$\Gamma(\mu^2) = 1$$

On définit la matrice Z_1 de renormalisation de vertex :

(*) Dans le cas de la seule interaction de contact on a donc le résultat cherché concernant la conservation des lois de degré. Les fonctions D de ce modèle s'écrivent :

$$D_{nue} = \mathrm{Det}\left[1 - \lambda_0 \Sigma\right] \quad , \quad D_{Ren} = \mathrm{Det}\left[1 - \lambda(\Sigma - A)\right] .$$

En posant $Z_1 = 1 - \lambda_0 A = (1 + \lambda A)^{-1}$, et en le portant dans D_{nue}, on trouve :

$$D_{nue} = D_{Ren} \, \mathrm{Det} \, Z_1 \,.$$

On verra dans un instant que Z_1 est la renormalisation de vertex (ici, c'est une matrice).

$$\Gamma = \Gamma_0 Z_1 \ . \tag{67}$$

De ces trois relations on déduit :

$$Z_1 = (1 - \lambda_0 A) = (1 + \lambda A)^{-1} \tag{68}$$

où A est donné par (63). En introduisant (66) et (68) dans (67), on tire :

$$\Gamma = \left[1 - \lambda (\Sigma - A) \right]^{-1} , \tag{69}$$

où :

$$\lambda_0 = Z_1 \lambda \ . \tag{70}$$

En comparant (69) et (66) on déduit que la forme analytique du vertex se conserve dans la renormalisation de vertex, puisque la transposition :

$$\begin{cases} \lambda_0 \longrightarrow \lambda \\ \Sigma \longrightarrow \Sigma - A \end{cases} \tag{70'}$$

ne change pas les formes analytiques.

Remarquons que la matrice Z_1 de renormalisation de vertex n'est ni symétrique, ni diagonale.

IV.2.3 - La boucle habillée π.

On définit la boucle habillée par la série matricielle :

$$\Pi(\Sigma) = \Sigma + \Sigma \lambda_0 \Sigma + \Sigma (\lambda_0 \Sigma)^2 + \ldots = \Sigma (1 - \lambda_0 \Sigma)^{-1} . \tag{71}$$

Notons par ailleurs que :

$$\Pi(p^2) = A (1 - \lambda_0 A)^{-1} = A (1 + \lambda A) = A Z_1^{-1} \tag{72}$$

De (71) et (72), on déduit la relation matricielle :

$$\Pi(\Sigma) - \Pi(p^2) = \tilde{Z}_1^{-1} \Pi(\Sigma - A) Z_1^{-1} \ , \tag{73}$$

avec, bien sûr :

$$\Pi(\Sigma-A) = (\Sigma-A)\left[1-\lambda(\Sigma-A)\right]^{-1}, \tag{74}$$

en utilisant (70). La relation (73) est connue, dans le littérature sous le nom de "Théorème des divergences de vertex superposées" de Salam(*). Remarquons que $\Pi(\Sigma-A)$ a la même forme que $\Pi(\Sigma)$ dans la transposition (70').

IV.2.4. - Propagateur matriciel habillé $\underline{\Delta_0}$

On définit $\underline{\Delta_0}$ par :

$$\underline{\Delta_0} = \Delta_0\, g\tilde{g} + \Delta_0^2\, g\tilde{g}\Pi g\tilde{g} + \ldots = \Delta_0\, g\left[1-\Delta_0\tilde{g}\Pi g\right]^{-1}\tilde{g}, \tag{74'}$$

qui se réduit à la forme connue, dans le cas classique d'une seule voie. Remarquons que le crochet dans (74') est un scalaire, si bien que les indices de voies ne sont contenues que dans g et $\tilde{g}$ (à l'extérieur de ce crochet) car :

$$\tilde{g}\,\Pi\, g = \mathrm{Tr}\,\Pi(g\tilde{g}).$$

IV.2.5. - Calcul de T_1.

Nous venons de voir que toutes les notions de vertex, boucle et propagateurs habillés s'étendent à plusieurs voies,si bien que la décomposition de Lee(9) conserve tout son sens.

Nous allons construire la partie réductible T_1 de l'amplitude T. A côté de :

$$\lambda_0 = Z_1\lambda$$

posons : (75)

$$g = Z_1\gamma \quad ,$$

(*) Nous remercions B. JOUVET de cette information.

qui définissent le couplage de contact renormalisé et la constante de couplage γ partiellement renormalisée(*).

Nous avons appelé T_2 la quantité définie par :

$$T = T_1 + T_2$$

et par les relations (58) et (60).

En comparant la série de perturbation de T et T_2, il est facile de voir que :

$$T_2 = \Gamma_0 \, \underline{\Delta_0} \, \tilde{\Gamma}_0 \quad . \tag{76}$$

On pose :

$$\underline{\Delta} = Z_1^{-1} \, \underline{\Delta_0} \, \tilde{Z}_1^{-1} \tag{77}$$

c'est-à-dire :

$$\underline{\Delta} = \Delta_0 \, \gamma \left[1 - \Delta_0 \, \tilde{g} \, \Pi(\Sigma) g \right]^{-1} \tilde{\gamma} \quad . \tag{78}$$

Posons de plus :

$$\Delta_0^{-1} = \Lambda - \mu_0^2 \quad , \quad \mu_0^2 = m^2 - \delta\mu^2 \quad , \quad \Delta^{-1} = \Lambda - m^2 \quad , \tag{79}$$

qui définissent le contreterme de masse $\delta\mu^2$ et une constante finie m^2.

Imposons enfin à (78) :

$$\underline{\Delta}(\mu^2) = \frac{\gamma \tilde{\gamma}}{\mu^2 - m^2} \quad .$$

Cela conduit à

$$\delta\mu^2 = \tilde{\gamma} \, \tilde{Z}_1 \, A \, \gamma \tag{80}$$

(*) Nous rappelons que nous n'avons pas besoin ici de renormaliser en Z_3 puisque les constantes de couplages renormalisées en Z_1 sont finies.

En portant ceci dans (78), compte tenu de (79), on tire :

$$\underline{\Delta} = \gamma \left[\Delta^{-1} - \tilde{\gamma}\, \pi(\Sigma - A)\gamma \right]^{-1} \tilde{\gamma} \tag{81}$$

En portant (67), (74) et (81) dans (76), il est clair que :

$$T_2 = \Gamma\, \underline{\Delta}\, \tilde{\Gamma} \tag{82}$$

Toutes les grandeurs dans (82), conservent leurs formes analytiques dans la transposition :

$$\begin{cases} (\lambda_0, g) & \longrightarrow & (\lambda, \gamma) \\ \Delta_0 & \longrightarrow & \Delta \\ \Sigma & \longrightarrow & \Sigma - A \end{cases} \tag{83}$$

Par suite, le résultat annoncé au début du paragraphe IV est démontré. En utilisant la définition de Z_1 (rel. (68)), de $\delta\mu^2$(rel.(80)), les définitions (75), et en posant :

$$\begin{cases} D_{nue} = \mathrm{Det}\left[\Delta_0^{-1} - \left(\lambda_0 \Delta_0^{-1} + g\tilde{g} \right) \Sigma \right] \\ D_{Ren} = \mathrm{Det}\left[\Delta^{-1} - \left(\lambda \Delta^{-1} + \gamma\tilde{\gamma} \right)(\Sigma - A) \right] , \end{cases} \tag{84}$$

on trouve, après quelques calculs, que :

$$\Delta_0^{n-1}\, D_{nue} = \mathrm{Det}\, Z_1\ \Delta^{n-1}\, D_{Ren} .$$

Si, enfin, on définit :

$$\mathcal{D}_{nue} = \Delta_0^{n-1}\, D_{nue} \quad , \quad \mathcal{D}_{Ren} = \Delta^{n-1}\, D_{Ren} , \tag{85}$$

on obtient les deux fonctions $\mathcal{D}$ "non paradoxales" au sens de Federbush (nous allons le démontrer au paragraphe qui suit), et alors :

$$\mathcal{D}_{nue} = \mathrm{Det}\, Z_1\, \mathcal{D}_{Ren} . \tag{86}$$

Par suite, la renormalisation de masse est additive et la renormalisation de vertex multiplicative. Il est remarquable que l'infini en masse disparaisse par addition et que la renormalisation de vertex disparait par quotient dans l'amplitude (puisque l'on a D/D).

IV.2.6 - Levée du paradoxe de Federbush.

Nous allons démontrer que les deux fonctions définies en (85) sont non paradoxales, c'est-à-dire qu'elles ne contiennent ni "faux pôles" ni "faux zéros".

Il suffit de calculer, par exemple :

$$\Delta^{n-1} D_{Ren} = \Delta^{n-1} \, Det\left[\Delta^{-1}(1 - \lambda(\Sigma - A)) - \gamma \tilde{\gamma}(\Sigma - A) \right] , \tag{87}$$

la démonstration étant identique pour :

$$\Delta_0^{n-1} D_{nue} = \Delta_0^{n-1} \, Det\left[\Delta_0^{-1}(1 - \lambda\Sigma) - g\tilde{g}\Sigma \right] .$$

De (87) on déduit trivialement :

$$\Delta^{n-1} D_{Ren} = \Delta^{-1} \, Det\left[1 - \lambda(\Sigma - A)\right] \, Det\left[1 - \Delta \gamma \tilde{\gamma}(\Sigma - A)(1 - \lambda(\Sigma - A))^{-1}\right] \tag{88}$$

Comme $\gamma\tilde{\gamma}$ est une matrice de dimension n et de rang 1, compte tenu de la définition de la trace, on a l'expression scalaire suivante pour le deuxième déterminant dans (88) :

$$1 - \Delta \, \tilde{\gamma} \, (\Sigma - A)\left[1 - \lambda(\Sigma - A)\right]^{-1} \gamma$$

En multipliant cette expression par :

$$\Delta^{-1} \cdot Det\left[1 - \lambda(\Sigma - A)\right] ,$$

on a :

$$\Delta^{n-1} D_{Ren} = \Delta^{-1} Det(1 - \lambda(\Sigma - A)) - \tilde{\gamma}(\Sigma - A) \, Cof\left[1 - \lambda(\Sigma - A)\right] \gamma , \tag{89}$$

où $Cof(P)$ désigne la matrice des mineurs algébriques de P.

Par suite, le résultat est démontré et l'expression (86) est bien une relation entre fonctions non paradoxales, puisque l'expression (89) n'a

ni "faux pôles" ni "faux zéros"(*).

V - SUR LA RENORMALISATION DIRECTE DE LA MATRICE K.

Remarquons d'abord qu'en raison de la "linéarité" de D par rapport aux fonctions B_λ , la renormalisation que nous avons faite de D, entraîne celle des fonctions B_λ . Il est clair, dans ces conditions, que la relation $\mathcal{F}$ qui lie les fonctions B_λ^{nue} aux fonctions B_λ^{Ren} :

$$B_\lambda^{nue} = \mathcal{F}(B_\lambda^{ren}) ,$$

est indépendante de λ , et est identique à celle qui lie les fonctions D^{nue} aux fonctions D^{Ren} (voir rel. (57) et (86), par exemple). On peut s'en convaincre en remarquant que les relations (57) et (58) sont valables pour toutes les déterminations de D, c'est-à-dire que $\mathcal{F}$ est indépendante du feuillet de Riemann considéré. Par suite, en utilisant la formule d'inversion de D établie au chapitre II, la conclusion précédente se déduit.

En conséquence renormaliser l'amplitude T revient à renormaliser K ; mais comme :

$$T = K\,[1 - ikK]^{-1} , \qquad (90)$$

il est clair que renormaliser la matrice K, revient aussi à renormaliser l'amplitude. L'intérêt d'un tel point de vue n'est ici, qu'ébauché ; il provient essentiellement d'une remarque que nous avons développée en étudiant les modèles rationnels :

1°/ - Les particules stables et instables considérées comme pôles de l'amplitude, sont engendrées par un nombre (plus petit) de pôles de K; éventuellement K n'a même pas de pôles comme dans le modèle (ZR). C'est la présence des seuils qui multiplie les pôles. Comme nous l'avons vu, une résonance (pour des questions d'unitarité, de T-invariance,..) est, en pratique, un ensemble de pôles de T, c'est-à-dire aussi le pôle de K qui les engendre.

2°/ - La matrice K ne "distingue" pas entre particules stables et

---

(*) Ceux-ci apparaîtraient par une mise en facteur d'une fonction rationnelle uniforme de s qui n'existe évidemment pas dans (89) puisque $1-\lambda(\Sigma-A)$ n'a pas de dénominateur uniforme en s.

particules instables ; par variation des résidus aux pôles de K on passe de façon continue des premières aux secondes. La matrice K est donc, dans une mesure qu'il reste à préciser, un point de départ possible pour un traitement unifié des particules stables et instables.

V.1 - Equation itérative de la matrice K.

Nous avons vu que, pour toute interaction Λ_0, la matrice T est donnée par :

$$T = \Lambda_0 + \Lambda_0 \Sigma T \quad ;$$

en utilisant la définition de la matrice K donnée par (90), il est aisé de déduire :

$$K = \Lambda_0 + \Lambda_0 (\Sigma - ik) K \quad . \tag{91}$$

Or $\Sigma - ik$ est, très exactement, la matrice diagonale des parties paires des boucles nues :

$$\Sigma = P_0 + ik \quad , \tag{92}$$

et par sa construction même P_0 est une matrice fonction analytique de s dans le plan complexe. Par suite on a :

$$K = \Lambda_0 + \Lambda_0 P_0 K \quad , \tag{93}$$

qui lie des fonctions analytiques et uniformes dans le plan complexe de s. L'équation (93) est valable, dans les modèles de Lee, Zachariasen et galiléen, en redéfinissant (90) de façon à y introduire la fonction de poids de ces modèles à la place de k. Par suite, la matrice K obéit à la même équation itérative si on effectue le remplacement :

$$\Sigma \longrightarrow P_0 \tag{94}$$

et cette équation donne la même série de perturbation que l'amplitude, à la transposition (94) près.

V.2 - Renormalisation de la matrice K.

Comme la renormalisation de K se fait de la même façon que celle exposée pour T au paragraphe IV ci-dessus, nous n'allons pas la reproduire. Nous ne mentionnerons donc que les différences dans les cas examinés précédemment ; l'extension aux cas généraux est immédiate.

Remarquons d'abord que les soustractions, nécessaires pour éliminer les divergences des boucles, peuvent être effectuées en n'importe quel point de l'axe réel du plan de la variab-le s. Dans ces conditions les constantes de renormalisation (qui, à plusieurs voies, sont des matrices) sont toujours réelles, même pour des particules instables.

La prescription générale, pour adapter l'ensemble des résultats trouvés pour l'amplitude T, à la matrice K, est la transposition (94) :

$$\begin{cases} \Sigma \longrightarrow P_0 \\ A \equiv \Sigma(\mu^2) \longrightarrow P_0(\mu^2) \end{cases} .$$

1°/ - Par exemple, dans le cas de l'échange d'une seule particule V, on a :

$$K = g \left[\Delta_0^{-1} - \tilde{g} P_0 g \right]^{-1} \tilde{g} ,$$

avec :

$$\Delta_0^{-1} = s - \mu_0^2 .$$

On doit aussi opérer la renormalisation " de masse" pour le pôle de K :

$$"\delta m^2" = \tilde{g} P_0(\mu^2) g ,$$

et la matrice K renormalisée s'écrit :

$$K = g \left[\Delta^{-1} - \tilde{g} (P_0 - P_0(\mu^2)) g \right]^{-1} \tilde{g} ,$$

avec :

$$\Delta^{-1} = s - \mu^2 ,$$

où μ^2 peut être fixé par une condition sur K analogue à celle introduite pour l'amplitude (voir § IV.1).

2°/ - Lorsque l'on superpose une interaction de contact à l'échange de la particule V, le traitement se fait de la même façon qu'au § IV.2 . Il est facile de voir qu'on peut encore définir des opérateurs associés à la matrice K qui sont les analogues évidents du vertex :

$$\Gamma_0 = (1 - \lambda_0 P_0)^{-1} ,$$

et de la boucle habillée :

$$\pi(P_0) = P_0 (1 - \lambda_0 P_0)^{-1} .$$

La partie irréductible de K s'écrit :

$$K_1 = \lambda_0 (1 - \lambda_0 P_0)^{-1}$$

Le propagateur habillé $\underline{\Delta_0}$ a pour homologue :

$$\underline{\Delta'_0} = \Delta_0 g \left[1 - \Delta_0 \tilde{g} \pi(P_0) g\right]^{-1} \tilde{g} ,$$

et la partie réductible :

$$K_2 = \Gamma_0 \underline{\Delta'_0} \tilde{\Gamma}_0 .$$

La matrice K s'écrit alors :

$$K = K_1 + K_2$$

En introduisant la matrice de renormalisation du vertex de K :

$$"Z_1" = \left[1 - \lambda_0 P_0(\mu^2)\right]^{-1} = \left[1 + \lambda P_0(\mu^2)\right]^{-1},$$

et de la "masse" du pôle de K :

$$"\delta m^2" = \tilde{\gamma} "Z_1" P_0(\mu^2) \gamma ,$$

on renormalise de la même façon K que T.

On peut alors montrer que K vérifie l'équation :

$$K = \Lambda + \Lambda P K , \qquad (95)$$

où[(*)] :

$$P = P_0 - P_0(\mu^2)$$

(*) Notons que P n'est pas la partie paire de $\Sigma - A$; P diffère de cette dernière par une matrice finie constante.

est finie.

Λ se déduit de Λ_0 par la transposition (83), où les constantes de renormalisation sont celles attachées à la matrice K.

On peut voir que nous n'opérons pas une renormalisation aux pôles de K. En effet, ceux-ci sont solution d'une équation du type :

$$\mathrm{Det}\ \underline{\Delta}_0^{-1} = 0$$

où $\underline{\Delta_0}$ est le "propagateur habillé" associé à la matrice K. Comme nous renormalisons la matrice $\underline{\Delta_0}$ nous renormalisons les coefficients de $B_0(s)$ (et non ses racines, qui sont les pôles de K) et les fonctions $B_\lambda(s)$ $(\forall \lambda \neq 0)$.

Les opérateurs vertex, propagateur, etc... associés à la matrice K ne sont pas des grandeurs formelles sans signification. Tout comme leurs homologues associés à la matricé T, ils sont représentables par des séries de perturbation. Pour obtenir ces dernières, il suffit de remplacer dans chaque terme des séries (66), (71) et (74') qui définissent respectivement le vertex, la boucle habillée, et le propagateur matriciel habillé, la boucle de self-énergie par sa partie paire (transposition (94)). L'analogie qu'on exprime ainsi entre théorie en matrice T et théorie en matrice K va bien au-delà de questions structurelles mises en évidence au chapitre II : On traduit une relation dynamique entre ces deux opérateurs. Ceci peut facilement être établi en théorie du potentiel où l'on peut voir que la matrice K vérifie l'équation de Lippmann-Schwinger, si on y remplace la fonction de Gree sortante(*) (qui figure dans le noyau) par la fonction de Green stationnaire(*).

V.3 - Expression des fonctions $B_\lambda(s)$. Cas particuliers.

Nous avons déduit les lois de degré de la fonction D ; nous aurions aussi bien pu le faire à partir du calcul direct des fonctions $B_\lambda(s)$ que les équations (93) et (95) permettent. Afin de mieux introduire la méthode générale qui y préside, nous allons l'illustrer dans le cas d'une et deux voies.

(*) ou, plus exactement, sa projection sur une onde partielle donnée.

Nous n'aurons pas à montrer la conservation des formes des fonctions B_λ elles résultent de (93), (95) et de la relation entre B_λ^{nue} et B_λ^{Ren}.

1 - Cas de 1 voie.

De l'expression (95) on tire :

$$K = \frac{\Lambda}{1-\Lambda P} \quad , \tag{96}$$

où P, dans le modèle galiléen, se réduit à une constante ; dans le modèle de Zachariasen il s'y ajoute un logarithme (voir § II.2). D'après le formalisme B/B, à une voie :

$$K = \frac{B_1}{B_0} \quad , \tag{97}$$

donc, à une fonction uniforme près, nous avons :

$$\begin{cases} B_0 = 1 - \Lambda P \\ B_1 = \Lambda \end{cases} \quad ; \tag{98}$$

cette fonction uniforme peut être choisie de façon à éliminer les pôles de Λ qui n'apparaissent pas dans le quotient (97) et elle sera différente suivant le type d'interaction choisie (elle est égale à 1 dans le seul cas de l'interaction de contact).

2 - Cas de deux voies.

L'expression matricielle (95) donne :

$$K = (1 - \Lambda P)^{-1} \Lambda \quad . \tag{99}$$

Λ étant l'interaction nue Λ_0 renormalisée suivant l'expression (83). En prenant tous les sous-déterminants diagonaux de (99) il est aisé de vérifier que :

$$\begin{cases} B_0 = 1 - \Lambda_{11} P_1 - \Lambda_{22} P_2 + \det\Lambda \; P_1 P_2 \\ B_1 = \Lambda_{11} - \det\Lambda \; P_2 \\ B_2 = \Lambda_{22} - \det\Lambda \; P_{11} \\ B_3 = \det\Lambda \end{cases} \quad , \tag{100}$$

à une fonction uniforme de s près, qu'on choisit de façon à lever le paradoxe de Federbush. Nous avons vu ce qu'était cette fonction dans le cours du § III, quand nous établissons les lois de degré (*).

P_1 et P_2 sont les parties paires renormalisées des boucles Σ_1 et Σ_2. On peut appliquer, bien sûr, (99) à n'importe quelle interaction figurant dans les relations (31).

IV.4 - Expression générale des fonctions $B_\lambda(s)$.

Reprenons l'équation (95) :

$$K = \Lambda + \Lambda P K \quad , \tag{95}$$

P étant la matrice diagonale des "boucles" de K, c'est-à-dire la partie uniforme en s de la matrice Σ. Dans l'expression renormalisée (95), la constante infinie est remplacée par une constante finie.

De (95) on tire :

$$K = (1 - \Lambda P)^{-1} \Lambda \tag{101}$$

Comme nous savons qu'il est aisé de trouver la fonction multiplicative qui élimine le paradoxe de Federbush, chaque fois que nous définissons des expressions des fonctions B nous omettons "à une fonction uniforme de s près" que nous devrions répéter presqu'à chaque ligne.

Nous allons définir :

$$P_M = \prod_{i \in M} P_i \quad , \quad P_\phi \equiv 1 \quad , \quad \forall M \in \mathcal{P}(N) \, . \tag{102}$$

(*) Dans le cas de (100), si $\Lambda = \lambda + \Delta \gamma \tilde{\gamma}$, il est facile de voir que la fonction multiplicative qui lève le paradoxe de Federbush est Δ^{-1} ; cette fonction n'introduit pas de "faux zéros" dans les fonctions B_λ. Avec ce choix on aura :

$$(B_{nue})_\lambda = (\mathrm{Det}\, Z_1)\,(B_{Ren})_\lambda \qquad \forall L \in \mathcal{P}(N)$$

De (101) on déduit, en prenant le déterminant global :

$$B_\nu = \Delta_N(\Lambda) = \Delta_N(K)\ \Delta_N(1+PK)^{-1}$$
$$B_0 = \Delta_N(1-P\Lambda) = \Delta_N(1+PK)^{-1} \qquad (103)$$

La seconde équation (103), par exemple, en développant le déterminant, et en utilisant le formalisme B/B de la matrice K dans :

$$B_0\ \Delta_N(1+PK) = 1$$

donne :

$$\sum_{M \in \mathfrak{B}(N)} P_M B_{\bar{M}} = 1 \ . \qquad (104)$$

L'équation (104) fournit une fonction B connaissant toutes les autres.
Si on pose :

$$\Lambda' = P^{1/2} \Lambda P^{1/2} \ ,$$

on tire de (101) :

$$\Delta_L(K^{-1}) = (-)^\ell \Delta_L(P)\ \Delta_L(1-\Lambda'^{-1}) \ , \qquad (106)$$

et en utilisant le formalisme B/B , on trouve :

$$\frac{B_{\nu-\lambda}}{B_\nu} = (-)^\ell P_L \sum_{L' \in \mathfrak{B}(L)} (-)^{\ell'} \frac{\Delta_{N-L'}(\Lambda')}{\Delta_N(\Lambda')} \ ; \qquad (106)$$

soit en utilisant B_ν donné par (103), après quelques calculs :

$$B_{\nu-\lambda} = \sum_{L' \in \mathfrak{B}(L)} (-)^{\ell-\ell'} P_{L-L'} \Delta_{N-L'}(\Lambda) \qquad \forall\ L \in \mathfrak{B}(N) \ . \qquad (107)$$

Dans le cas particulier de deux voies, (107) donne (100). L'équation (101) peut être inversée, et, un calcul simple conduit à la formule inverse de de (107);

$$\Delta_L(\Lambda) = \sum_{R \in \mathfrak{B}(N-L)} B_{\lambda \div \rho} P_R \qquad , \ \forall L \in \mathfrak{B}(N) \ , \qquad (108)$$

qui donne, pour le cas de deux voies, les relations inverses de (100) :

$$\begin{cases} 1 = B_0 + P_1 B_1 + P_2 B_2 + P_1 P_2 B_3 \text{ (en prenant } \Delta_\phi(\Lambda) \equiv 1 \text{ dans (108))} \\ \Lambda_{11} = B_1 + P_2 B_3 \\ \Lambda_{22} = B_2 + P_1 B_3 \\ \det \Lambda = B_3 \end{cases} \qquad (109)$$

V.5 - Détermination de l'interaction par la phénoménologie .

La description phénoménologique fournit la matrice K, c'est-à-dire les fonctions B_0, B_1, B_2 et B_3 (dans le cas de deux voies). Pour fixer les idées, supposons que nous soyons dans le cadre du modèle (ZR) avec n'importe quelle boucle.

Les relations (109) permettent de construire l'interaction Λ qui, dans ce cas, est une interaction de contact (couplage de Fermi). L'élimination des constantes infinies dans les boucles $(P_0)_1$ et $(P_0)_2$, a nécessité une soustraction, c'est-à-dire que la valeur trouvée de :

$$\Lambda \equiv \lambda$$

dépend du point de soustraction. L'expérience donne une matrice λ (notée λ_1), l'ensemble de toutes les autres se déduit en changeant de point de soustraction (il y a donc une classe d'équivalence des matrices λ).

Nous allons montrer comment les déterminer dans ce cas. La physique étant indépendante du point de soustraction, nous avons :

$$T_1 = \lambda_0 (1 - \lambda_0 \Sigma)^{-1}$$

on déduit :

$$\lambda_1 = \lambda_0 (1 - \lambda_0 \Sigma(s_1))^{-1} \quad , \quad \lambda_2 = \lambda_0 (1 - \lambda_0 \Sigma(s_2))^{-1}$$

λ_1 et λ_2 sont deux représentants de la classe de tous les λ autorisés par une phénoménologie. Par un calcul matriciel simple, on déduit :

$$\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1} = \Sigma(s_2) - \Sigma(s_1) \qquad (109')$$

dans cette relation, le second membre est fini puisque la constante infinie disparaît par la différence.

Remarquons que d'un point de vue théorique, la connaissance de l'interaction ne suffit pas encore à la détermination du Lagrangien(*) .

VI - SUR LE CRITERE DE NON-ELEMENTARITE $Z_3 = 0$.

Dans les cas que nous examinons dans ce chapitre (modèle galiléen et modèle de Zachariasen), on a :

$Z_1 = 1$ (absence d'interaction de Fermi).

ou $Z_1 = 0$ (résulte de la définition de Z_1 dans le modèle de Zachariasen).

Le critère de non élémentarité des particules est alors :

$$Z_3 = 0$$

Nous allons l'examiner sur quelques cas particuliers en formalisme D/D où l'expression cherchée peut être établie sans trop de calculs.

VI.1 - Condition de non élémentarité.

1 - Cas d'une particule.

L'ensemble des fonctions B_μ après notre renormalisation s'écrit

$$\begin{cases} B_0 = s - \mu_R^2 & \text{(voir § III.1)} \\ B_i = g_i^2 & \\ B_\mu = 0 \qquad \forall m \geq 2 & \end{cases} \qquad (110)$$

g_i dans (110) est la constante de couplage nue à la voie i.

Dans le cas l'amplitude s'écrit :

$$T_{ij} = \frac{(B_i B_j)^{1/2}}{D_0} \qquad (111)$$

conformément au formalisme D/D (voir ch. II).

Supposons que T ait un pôle en s_T. On sait (voir ch. V) que le résidu au pôle de T factorise :

$$T_{ij} \underset{s \to s_T}{\sim} \frac{\gamma_i \gamma_j}{s - s_T} \qquad (112)$$

En portant (110) dans (111), compte tenu de (112), et en définissant Z_3 par :

$$\gamma_i \gamma_j = Z_3 g_i g_j$$

(*) Nous remercions B. JOUVET de cette information.

on trouve que :

$$Z_3 = \left[D'_0(s_T) \right]^{-1} \quad . \tag{113}$$

La condition de non élémentarité est :

$$\left[D'_0(s_T) \right]^{-1} = 0 \quad . \tag{114}$$

En écrivant la fonction D pour les fonctions B_λ de (110), (114) prend la forme :

$$\left[1 - \sum_{j=1}^{n} P'_j(s_T)\, g_j^2 - i \sum_{j=1}^{n} k'_j(s_T)\, g_j^2 \right]^{-1} = 0 \quad . \tag{115}$$

Dans le cas du modèle galiléen, $P'_j(0)$ et (115) se réduit à la relation[(*)] :

$$\left[1 - i \sum_{j=1}^{n} k'_j(s_T)\, g_j^2 \right]^{-1} = 0 \tag{115'}$$

qui donne la règle de somme de Rajasekaran[12] pour les constantes de couplage de la particule composée. La règle de somme du cas élémentaire se déduit de (113) :

$$1 - Z_3 = -\left[i \sum_{j=1}^{n} k'_j(s_T)\, \gamma_j^2 + \sum_{j=1}^{n} P'_j(s_T)\, \gamma_j^2 \right] \tag{116}$$

qui, si le modèle est galiléen, est la seconde relation de Rajasakaran[12].

Sauf si la particule se trouve à un des seuils[(**)], l'équation (115) ou (115') a pour solution la prescription :

$$g_i \longrightarrow \infty \ (\forall i \in N) \quad \underline{et} \quad g \tilde{g} \Delta_0 \longrightarrow \lambda_0 \quad ,$$

c'est-à-dire que la limite composée d'un couplage de Yukawa est un couplage de Fermi[13][16]

(*) Le signe (qui apparaît dans (115') comme (116)) n'existe pas chez Rajasekaran[12]. Cela provient de ce que cet auteur définit la constante de couplage d'une particule comme le résidu changé de signe au pôle de l'amplitude.

(**) Dans ce cas il faut renormaliser en un autre point.

2 - Superposition d'une interaction de contact.

Nous avons vu au § IV que la décomposition de Lee de l'amplitude est donnée par :

$$T = \Gamma_0\, g \left[\Delta_0^{-1} - \tilde{g}\, \Pi(\Sigma)\, g \right]^{-1} \tilde{g}\, \tilde{\Gamma}_0 + \Gamma_0 \lambda_0 \qquad (117)$$

(où le crochet est un scalaire dans l'espace des voies), en termes des grandeurs nues.

Remarquons tout d'abord que, pour les modèles qui nous occupent la fonction de vertex Γ_0 n'introduit pas de pôle dans l'amplitude(*)(20). En effet, en résolvant directement l'équation itérative de T, on trouve :

$$T = (\lambda_0 + g\,\tilde{g}\,\Delta_0)\left[1 - (\lambda_0 + g\,\tilde{g}\,\Delta_0)\,\Sigma \right]^{-1}. \qquad (118)$$

Comme on suppose que la série de perturbation de T est convergente, il s'en suit que (117) et (118) sont égales et, sur cette dernière expression, on voit que les pôles du vertex n'interviennent pas comme pôles du propagateur. Par suite, la règle d'annulation de Jin-Mac-Dowell est vraie -au moins dans nos modèles- quel que soit le nombre de voies. Si on écrit (117) et (118) pour l'échange d'un nombre quelconque de particules $V^{(r)}$ on conserverait le même résultat. On remarquera que la nature des particules physiques (pôles de T) n'intervenant pas dans notre déduction, notre conclusion est vérifiée, que les particules sont stables ou non.

Remarquons que la règle de Jin-Mac-Dowell(20) ainsi que l'extension que nous en donnons, ne veut absolument pas dire que l'interaction de contact n'engendre pas de singularités ; ce qu'elle indique est que les pôles de Γ_0 ne sont pas singularités de T.

En réarrangeant la série (117), il est d'ailleurs assez aisé(**) de déduire (118). De cette remarque, il suit que les pôles de T sont ceux du propagateur de la partie réductible de l'amplitude. Soit μ^2 un pôle de l'amplitude :

(*) Ceci est connu dans la littérature sous le nom de "règle d'annulation de Jin-Mac-Dowell" (20) qui a été établie généralement dans le cas d'une voie. Cela consiste précisément à dire que les résidus aux pôles de Γ_0 dans $\Gamma_0 \lambda_0$ (partie irréductible de l'amplitude) apparaissent dans l'autre partie du développement de Lee de l'amplitude, avec un résidu de signe opposé.

(**) Il suffit d'utiliser au lieu de $g[\ ]^{-1}\tilde{g}$ dans (117) : $\Delta_0 = g\tilde{g}\left[\Delta_0^{-1} - \Pi(\Sigma)\, g\tilde{g}\right]^{-1}$, la définition de T_1 et des propriétés de T-invariance.

$$Z_1 = \left[\Gamma_0(\mu^2)\right]^{-1} . \qquad (119)$$

On définit le vecteur constante de couplage, renormalisé de vertex seulement :

$$\gamma = Z_1 g . \qquad (120)$$

A une fonction près sans importance, on a :

$$D_0 = \mathrm{Det}\left[\Delta_0^{-1} - (\lambda_0 \Delta_0^{-1} + g\tilde{g})\Sigma\right] \qquad (121)$$

les pôles de T étant les zéros de D_0 , en utilisant (119), il vient :

$$T_{ij} \underset{\lambda \to \mu^2}{\sim} \frac{\gamma_i \gamma_j}{\Delta - \mu^2} \frac{1}{D_0'(\mu^2)} \qquad (122)$$

la définition de la constante de couplage physique(*) conduit alors à :

$$Z_3 = \left[D_0'(\mu^2)\right]^{-1}$$

Par suite la condition de non élémentarité est encore :

$$\left[D_0'(\mu^2)\right]^{-1} = 0 \qquad (123)$$

Le calcul explicite de la condition de non élémentarité d'une des particules d'un doublet de particules, s'exprime encore par :

$$\left[D_0'(\mu^2)\right]^{-1} = 0$$

On peut démontrer l'équivalence de cette condition avec la relation de Houard et Le Guillou[15] dans le même cas : $\det Z = 0$

Ainsi, la condition de non-élémentarité d'une particule s_T, pour les interactions envisagées, prend la forme générale;

$$\left[D_0'(s_T)\right]^{-1} = 0 \qquad (124)$$

(*) Voir note page 224.

VI.2 - Sur les conditions de non-élémentarité en matrice K.

Nous n'allons présenter la question que pour le seul cas de l'échange d'une particule dans n voies. On a vu que, dans ce cas, les fonctions B étaient :

$$\begin{cases} B_0 = s - \mu_R^2 - \sum_i g_i^2 P_i(s) \\ B_i = g_i^2 \\ B_\mu = 0 \qquad \forall m \geq 2 \end{cases} \qquad (125)$$

où P_i est la partie paire de la boucle Σ_i .

Le formalisme B/B entraîne :

$$K_{ij} = \frac{\gamma_i \gamma_j}{s - s_R} \qquad (125')$$

où γ_i représente le résidu au pôle de K.

Si nous définissons la constante :

$$Y = \left[B_0'(s_R) \right]^{-1} , \qquad (126)$$

il est clair que :

$$\gamma_i \gamma_j = Y g_i g_j . \qquad (127)$$

De l'expression même des B_λ , on peut déduire :

$$Y = \left[1 - \sum_{j=1}^{n} P_j'(s_R) g_j^2 \right]^{-1} \qquad (128)$$

d'où on tire en utilisant (127) et (128) :

$$1 - Y = - \sum_{j=1}^{n} P_j'(s_R) \gamma_j^2 . \qquad (129)$$

La condition :

$$Y = 0 \qquad (130)$$

a pour solution $g_j^2 \to \infty$. La masse nue étant infinie, si on pose :

$$\lim_{g_i \to \infty} g_i^2 \Delta_0 = \lambda_0 \qquad \text{(interaction de contact)}, \qquad (131)$$

on obtient la prescription de non-élémentarité habituelle[19].

Il n'y a qu'un seul cas où (130) n'a pas de sens, c'est dans le modèle galiléen avec échange d'une seule particule, car alors les fonctions P_j sont constantes et nécessairement(*) :

$$Y = 1.$$

Dans le cas du modèle de Lee, ou de Zachariasen, par contre, la relation (130) conduit à la prescription habituelle ($Z_3 = 0$).

Par suite, dans les cas où elle a un sens, la condition $Y = 0$ est équivalente à la condition de non élémentarité $Z_3 = 0$.

VII - CONCLUSIONS.

1°/ - En utilisant le formalisme D/D pour étudier les modèles sans voie croisée de théorie des champs, nous avons pu montrer que les modèles phénoménologiques rationnels avaient une interprétation physique précise, reliée à la structure supposée des interactions. Cela nous a permis de montrer que des modèles facilement interprétables pouvaient être engendrés ; le plus simple d'entre eux correspond à la superposition d'une interaction de contact sur l'échange d'une particule.

La difficulté suscitée par les divergences des boucles de self-énergie a pu être éliminée par une renormalisation dont les effets sont ceux d'une régularisation : tout se passe comme si on pouvait remplacer les "cons-

---

(*) Cela tient à ce que B_0 devenant constant, l'écriture (125') n'a plus de sens. En effet, dans cette relation les résidus deviennent infinis puisqu'il n'y a plus de particule. Si la particule élémentaire s_K correspond à un état résonnant, on peut expliquer le phénomène physiquement; l'écriture (125') revient à dire que la phase de T passe par $\pi/2$ en s_K, alors que $Z_3 = 0$ signifie que cela ne se produit en aucun point de la région physique.

tantes" infinies par des constantes arbitraires finies. La conservation de la structure analytique des fonctions dans cette renormalisation font que les lois de degré et la correspondance avec les modèles rationnels a un sens.

2°/ - Tout cela nous conduit à donner un sens physique plus précis à la notion d'inéquivalence des modèles rationnels que nous avons introduit au chapitre VI : deux modèles sont inéquivalents si les interactions qu'ils expriment sont différentes. L'inéquivalence -par exemple- des modèles (ZR) et (BW) que nous avons caractérisée par des propriétés analytiques, s'enrichit d'une propriété physique : le modèle (ZR) décrit une interaction de contact, alors que le modèle (BW) décrit l'échange d'une particule.

3°/ - La décomposition analytique des boucles de self-énergie et l'équation itérative de l'amplitude, conduisent à montrer que la matrice K vérifie, à une transposition près, la même équation que T. Il s'en est suivi que l'étude de la matrice K -et sa renormalisation- pouvait être effectuée sans l'intermédiaire de l'amplitude.

L'intérêt de ceci ne peut qu'être ébauché ; il tient à ce que :
- la matrice K ne "distingue" pas entre les particules stables et les particules instables, puisqu'on passe des unes aux autres par des variations continues des paramètres physiques ;
- la "pologie" de K est plus fondamentale que celle de T, pour laquelle la présence des seuils importe (voir ch. VI). On devrait pouvoir, par le biais de la matrice K, faire un traitement unifié des particules stables et instables, mais cela est hors du cadre de ce travail.

4°/ - En examinant le critère de non élémentarité de JOUVET :

$$Z_3 = 0,$$

nous avons vu qu'en formalisme D/D, il s'exprimait par :

$$\left[D'_0(s_T)\right]^{-1} = 0 \quad (s_T \text{ étant le pôle de T}),$$

Nous avons pu alors remarquer que, lorsqu'elle a un sens(*), la condition

$$\left[B'_0(s_K)\right]^{-1} = 0 \quad (s_K \text{ étant le pôle de K}),$$

donne le même résultat que la condition de non élémentarité du pôle de T.

Cela poursuit encore l'analogie entre les deux opérateurs T et K.

(*) C'est-à-dire sauf pour le modèle galiléen à échange d'une seule particule.

5°/ - Notons enfin qu'il est possible de donner un sens phénoménologique à la notion de particule composée. Nous avons en effet, remarqué que celle-ci (interaction de Fermi) correspondait à la loi de degré du modèle (ZR) pour le cas galiléen et le modèle de Zachariasen. Le test de Rajasekaran[12] pour les particules composées (pas de pôle de K au voisinage du pôle de T) n'est cependant que partiel. Il n'est, en effet, vrai que dans le cadre du modèle galiléen car, dans le modèle de Zachariasen, le couplage de contact entraîne l'existence d'un pôle de K proche du seuil, que la particule soit ou non composée.

Le critère que nous proposons pour notre part, est plus général[(*)]. Il consiste à remarquer que, pour toute boucle, la loi de degré est fixée ainsi que le nombre de paramètres. Le modèle en matrice K correspondant, peut être construit à l'aide des formules du § V. Nous disposons donc d'un critère plus précis, pour la détermination phénoménologique de la nature des particules; ce critère peut être considéré comme relativiste dans la mesure où le modèle de Zachariasen l'est.

Nous avons proposé[21] de classer dans SU(3) non le pôle de T observée, mais le pôle (éventuel) de K qui l'engendre[(**)]. Peu après et indépendamment de nous, Rajasekaran[12] proposait une idée plus précise ; seules les particules élémentaires -au sens de la théorie des champs- doivent prendre place dans SU(3).

L'analogie entre ces deux propositions vient, dans le cadre du modèle galiléen, de ce qu'elles coïncident puisqu'alors le pôle de K est la particule élémentaire[12]. Le problème en vue dans ces différentes approches est, bien sûr, celui de la violation de SU(3) pour le $Y_0^*(1405)$ qui trouverait ainsi, une solution élégante. Comme la coïncidence entre pôle de K et particule élémentaire n'est vraie que dans le cadre du modèle galiléen, cette solution là est douteuse.

(*) Dans le cadre des modèles sans voie croisée, bien sûr.

(**) Le fondement de cette proposition réside dans le fait que, du point de vue analytique, une résonance, par exemple, n'est pas un pôle de T mais plusieurs. Dans le cas général un seul est observable et il n'y a pas d'ambiguité. Dans certaines circonstances, plusieurs pôles de T, correspondant à la même particule, peuvent être observés (par exemple par un effet de seuil, qui rapproche de la région physique, parfois de façon sensible, les pôles des feuillets lointains) ; ceci entraîne alors une ambiguité sur la notion même de particule.

A nos précédentes discussions sur le $Y_o^*(1405)$ on peut ajouter deux choses :

i) - Les modèles galiléens qui ont été testés, correspondent tous soit à une interaction de contact, soit à une interaction du Yakawa (échange de particule). Le modèle que nous avons établi, qui est la superposition de ces deux types d'interactions, n'a pas été essayé. Il contient certes plus de paramètres, mais on peut toujours imposer des conditions qui en diminueront le nombre (par exemple: $\det \lambda = 0$) et construire la matrice K correspondante à l'aide des relations du § V. Il se pourrait alors que le quotient des constantes de couplage nues - qui apparaissent comme paramètres- vérifie SU(3).

ii) - On n'a pas essayé de tester la loi de degré ZR dans le cadre du modèle de Zachariasen (qui introduit des pôles de K proches des seuils). Si un tel test s'avérait positif, on aurait des raisons mieux fondées de considérer le $Y_o^*(1405)$ comme une particule composée.

o

o o

CHAPITRE VIII

-:-:-:-:-:-:-:-:-

CONCLUSION GENERALE

-:-

Les hypothèses qui fondent ce travail ne font que traduire le postulat d'analyticité, fondamental en théorie de la matrice S. La Causalité, la connexité, la T-invariance conduisent à considérer cet opérateur comme la valeur sur la région physique -coupure de droite- d'une fonction analytique réelle dans le plus grand domaine possible du plan complexe de la variable s ; les singularités dynamiques n'apparaissent que comme des limites de ce domaine. Le prolongement aux valeurs complexes de l'énergie des relations d'unitarité physique, l'introduction de l'unitarité étendue, comme la généralisation de ces hypothèses aux déterminations non physiques de la matrice S ne sont encore que des propriétés d'analyticité. Si la signification physique de certains de ces postulats est claire—ne serait-ce que par leurs analogies avec les concepts fondamentaux des théories existantes-ce n'est pas le cas de toutes. Il reste, par exemple, à fonder la généralisation des relations d'unitarité aux feuillets non physiques. Si ces hypothèses d'analyticité limitent les possibilités de choix de l'interaction, elles ne déterminent pas les structures dynamiques. Elles constituent, de ce fait, un cadre général pour l'étude en ondes partielles de la matrice S à n voies de deux corps.

Le jeu d'hypothèses que nous avons choisi a pour conséquence fondamentale l'extension à une surface de Riemann du plus grand domaine de méromorphie de la matrice S. La richesse d'information en ce qui la concerne varie avec le type d'unitarité qu'on convient d'introduire.

Si l'on considère le cas de l'unitarité physique -avec sa généralisation à toutes les déterminations de S- le domaine de méromorphie trouvé dépend de l'élément de matrice S_{ij} concerné. Plus précisément, S_M étant la sous-matrice de S associée à une partie physique M de l'ensemble des voies son domaine de définition est une surface de Riemann Γ_M à 2^{n-m+1} feuillets coupés à gauche et par le segment $[s_1, s_{2^m-1}]$ si :

$$M = \{ s_1, \ldots, s_{2^m-1} \}$$

Sur Γ_M, les seuils de N-M et l'ensemble M sont, dans tous les feuillets des branchements algébriques du premier ordre. Nous avons été conduit à

postuler l'unitarité étendue sous la forme :

$$S_L \cdot {}^{\prime}S_L = 1 \qquad \forall L \in \mathcal{J}(N) \quad . \tag{1}$$

Cette expression nous est apparue comme la plus simple qui introduise le "principe d'indépendance des seuils normaux" de Olive pour symétriser le rôle des différents seuils du processus.

Il n'y a, cependant, pas de prescription universelle pour la formulation de ce principe, si bien qu'il existe des expressions possibles de l'unitarité étendue autres que (1). Celle de Newton en théorie du potentiel conduit par exemple à l'uniformité de la matrice K définie par :

$$S = k^{-l-1/2}(1+ik^{2l+1}K)(1-ik^{2l+1}K)^{-1}k^{l+1/2} \quad . \tag{2}$$

Pour pouvoir retrouver des propriétés bien connues en théorie non relativiste, nous avons dû adjoindre à l'unitarité étendue sa généralisation aux déterminations non physiques de la matrice S. C'est seulement à ce prix que nous avons retrouvé des résultats classiques :

i). Les sous-déterminants diagonaux de la matrice S sont des fonctions uniformes sur une surface de Riemann $\mathcal{R}_n$ à 2^n feuillets coupés à gauche, et sur laquelle les seuils sont, dans tout feuillet, des points de branchement algébrique du premier ordre.

ii). Du point de vue matriciel, c'est T :

$$S = 1 + 2i\, k^{1/2}\, T\, k^{1/2}$$

qui est défini sur $\mathcal{R}_n$, et non pas S.

Sans l'introduction de la condition classique sur le comportement de l'amplitude aux seuils, ces propriétés n'engendrent pas l'uniformité de K dans le plan de la variable s coupé à gauche.

Enfin, si on choisit l'unitarité étendue et sa généralisation aux feuillets non physiques, on établit l'extension du formalisme déterminantal noté D/D -de Le Couteur et Newton .

Les déterminants diagonaux de la matrice S peuvent être exprimés comme le quotient de différentes déterminations d'une seule fonction D sur $\mathcal{R}_n$:

$$\Delta_L(S) = \frac{D_\lambda}{D_0} \quad , \forall L \in \mathcal{J}(N) \quad . \tag{3}$$

Cette propriété est donc structurelle et indépendante dans tout contenu dynamique(*). Si nous supposons que celui-ci est un potentiel, la fonction D devient le déterminant de Fredholm de l'équation de Lippmann-Schwinger à plusieurs voies ; nous avons, autrement :

$$D_0 = B_0(s) \quad \mathrm{Det}\,[1 - ikK] \quad , \tag{4}$$

où $B_0(s)$ est une fonction uniforme de la variable s. La fonction D admet un développement standard :

$$D_\mu = \sum_{L \in \mathcal{P}(N)} (-i)^{\ell} \; (-)^{\mathrm{card}(L \cap M)} \; k_L \; B_\lambda(s) \quad , \quad \forall M \in \mathcal{P}(N). \tag{5}$$

Les fonctions uniformes $B_\lambda(s)$ qui interviennent dans cette formules permettent de construire un formalisme déterminantal de la matrice K :

$$\Delta_L(K) = \frac{B_\lambda(s)}{B_0(s)} \qquad \forall L \in \mathcal{P}(N) \quad ; \tag{6}$$

mis à part les propriétés dûes à la multiformité de D, les formalismes D/D et B/B sont analogues.

Les expressions (6) traduisent généralement l'uniformité des déterminants diagonaux de K ; ils ne conduisent à la même propriété pour la matrice K, que si on introduit la condition classique sur les comportements aux seuils.

Le formalisme D/D permet de poser de façon simple un certain nombre de problèmes en théorie des collisions à plusieurs voies. Cela est illustré par quelques exemples.

(*) Dans la mesure où la dynamique du problème ne viole pas les hypothèses d'analyticité que nous avons dû introduire, notamment l'unitarité dans les feuillets non physiques.

En introduisant une hypothèse restrictive (Tout pôle de S est un zéro du même ordre de D_o), on établit qu'il y a factorisation du polynôme numérateur de la partie principale du développement de Laurent de la matrice S au voisinage de ses pôles. C'est une généralisation du théorème bien connu sur la factorisation des résidus aux pôles simples de l'amplitude. En supprimant la condition restrictive que nous avons signalé, on montre que les propriétés de factorisation locale peuvent avoir lieu aussi bien aux pôles de S qu'en des points réguliers (notamment aux zéros), aussi bien pour la détermination principale $S(o)$ que pour ses déterminations non physiques. L'existence de propriétés de factorisation locale comme leur absence sont déterminées par la structure en zéros et pôles de la matrice S sur toute la surface $\mathcal{R}_n$. On retrouve de cette façon le lien qui unit le feuillet physique aux feuillets non physiques.

L'existence de relations simples entre modules et phases des différentes déterminations de D sur la région physique conduit, d'une part à la généralisation (déterminantale) du théorème d'interaction dans l'état final pour le cas de n voies et, d'autre part, à une expression (en termes de déterminants de S) de la variation de phase de D_o sur des intervalles finis de la région physique.

Un autre type de problème auquel le formalisme D/D donne une formulation simple est celui qui résulte de l'indétermination expérimentale. Par cette expression, nous entendons : l'indétermination sur les valeurs des paramètres physiques provenant de l'éxistence de voies non mesurées dans un processus à plusieurs voies. Du point de vue formel, on démontre que cela conduit à une indétermination de la fonction D, qui se matérialise par une fonction d (multiplicative de D) laquelle n'admet pas le seuil de la voie mesurée comme point de branchement. On a pu montrer que cette fonction d factorise :

$$d = \prod_{j \in N-\{i\}} d^{(j)}(k_j)$$

(i est la voie mesurée). Le sens physique d'une telle propriété est clair et traduit une structure inattendue ; si une résonance, par exemple, de la voie j (non mesurée) n'est pas couplée à la voie i (voie mesurée), elle n'est

couplée à aucune autre voie. Suivant qu'on exige l'analyticité de S dans tout le feuillet physique, ou seulement, dans ce feuillet, au voisinage de la région physique (causalité au sens de Wanders), il faudra ou non imposer la propriété suivante : les zéros et pôles de d sont d'ordre pair (les coupures de gauche n'ont aucune contrainte à subir). Dans le cas contraire le domaine d'analyticité de S est fixé par le plus proche zéro ou pôle simple de d.

Parmi les conséquences de l'indétermination expérimentale, on peut relever les suivantes :

i). les grandeurs liées aux voies non mesurées de la diffusion, ne peuvent être considérées comme déterminées phénoménologiquement ; remarquons que la constante de couplage du $Y_o^*(1405)$ à la voie $\Sigma\pi$ entre, a priori, dans cette catégorie.

ii). la forme analytique de la matrice K est indéterminée. Ceci constitue un élément d'explication de l'indépendance relative de la physique par rapport aux paramétrisations utilisées pour la décrire.

Pour illustrer ces résultats nous avons introduit les phénomènes d'indétermination dans l'onde S_{11}, de πN, traitée comme un problème à deux voies couplées :

πN et ηN.

En ne modifiant que les coupures de gauche dans :

$\eta N \longrightarrow \eta N$,

on a pu obtenir des positions complètement arbitraires pour le pôle de K et la constante de couplage $N_{1/2}^*(1520)\eta N$ a pu être facilement multipliée par 2.

Nous avons pu étudier une classe de modèles utilisés pour la description phénoménologique des données expérimentales : les modèles en matrice K. Nous nous sommes plus particulièrement occupés des modèles de Ross-Shaw (formules en matrice K^{-1} constantes (ZR), formules de portée effective (ER)), des formules habituelles de Breit-Wigner à largeur variable (BW) et des modèles vérifiant la condition faible de Levinson (WLC). Comme ils n'introduisent que des pôles et zéros pour l'amplitude sur la surface de Riemann, nous les avons appelés modèles rationnels. En en étudiant certaines caractéristiques (lois de degré des fonctions B, nombre de zéros de D), on a montré que ces modèles donnaient des descriptions inéquivalentes de la réalité

correspondant à des interprétations physiques différentes. Nous les avons discutées, prenant toujours l'onde s_{11} comme exemple : suivant les cas, le N^{*}_{1520} était un état lié virtuel (au sens de Dalitz) ou une résonance de la voie ηN, l'onde S_{11} un problème à 2 voies ou 3 voies.

L'analyse de certains modèles sans voie croisée de théorie des champs (modèles de Lee, Zachariasen, galiléen) permet de porter plus avant l'étude de l'inéquivalence des modèles rationnels. Il est apparu que ceux-ci sont interprétables en termes d'échange, et qu'on peut les classer de la façon suivante :

- le modèle (ZR) correspond à une interaction de contact (Fermi).
- le modèle (BW) correspond à une particule échangée (interaction de Yukawa).
- le modèle (WLC) correspond à l'échange de plusieurs particules.
- le modèle (ER) correspond à l'échange d'un nombre de particules égal au nombre de voies du problèmes.

Les propriétés d'irréductibilité des modèles rationnels et l'inéquivalence des descriptions phénoménologiques qu'ils engendrent, trouvent ainsi une interprétation physique simple : deux modèles sont inéquivalents s'ils correspondent à deux types d'interactions qui diffèrent quantativement (sur le nombre de particules échangées) ou qualitativement (présence ou absence d'une interaction de contact).

Nous venons de faire l'énumération des correspondances entre modèles rationnels et modèles de théorie des champs ; cela nous montre que les modèles correspondant à la superposition d'une interaction de Fermi à l'échange de particules ne sont pas encore utilisés en phénoménologie des collisions à plusieurs voies ($\bar{K}N$ à basse énergie, par exemple).

Bien que la matrice K ne soit pas directement accessible à la mesure, plusieurs modèles de basse énergie l'introduisent en lui attribuant tout le contenu supposé de la dynamique du problème. A ce point de vue, la théorie des perturbations, qui montre que l'amplitude vérifie l'équation itérative :

$$T = \Lambda_0 + \Lambda_0 \Sigma T \qquad (7)$$

montre aussi qu'une étude dynamique directe de la matrice K est possible ; il suffit, pour le voir, de porter le décomposition analytique des boucles de self-énergie :

$$\Sigma = P_0 + i\rho$$

(où ρ est la matrice des fonctions de poids) dans (7) pour voir que la matrice K vérifie :

$$K = \Lambda_0 + \Lambda_0 P_c K$$

Cela ajoute aux analogies formelles entre T (ou S) et K, une analogie dynamique.

o

o o

REFERENCES DU CHAPITRE O

-:-:-:-:-:-:-:-

(1) R.J. EDEN, P.V. LANDSHOFF, D.I. OLIVE, J.C. POLKINGHORNE, "The Analytic S matrix" Cambridge University Press (1966).

(2) M. BENAYOUN, J. LANCIEN, Ph. LERUSTE - Nuov. Cim. 63 A, 969 (1969).

(3) S.T. HU - "Elements of Modern Algebra" - Holden Day Inc. San Francisco (1965).

(4) W. RUDIN - "Real and complex analysis" - Mac Graw Hill - New York (1966).

(5) F.R. GANTMACHER - "Théorie des matrices" Vol.1 Dunod. Paris (1966).

(6) R.G. NEWTON - "Scattering theory of waves and particles" - Mac Graw Hill - New York (1966).

(7) G. BARTON - "Introduction to advanced field theory" - Interscience-New York (1963).

(8) J. HIL GEVOORD - "Dispersion Relations and Causal Description" - North Holland - Amsterdam (1960).

(9) G. WANDERS - Nuov. Cim. 14, 168 (1959).

(10) C. CHANDLER et H.P. STAPP - Journ. of Math. Phys. 10, 826 (1969).
D. IAGOLNITZER et H.P. STAPP - Comm. in Math. Phys. 14, 15 (1969).

(11) G.F. CHEW - "Analytic S-matrix" - Benjamin. New York (1966).

(12) C.C. OEHRING et J.D. DE SPREE - "Elements of complex analysis". Benjamin. New York (1961).

(13) J. HAMILTON - Scott. Universities' Summ. School 1963.
Oliver and Boyd, London (1964).

(14) R. OEHME Zeich. für Physik 162, 431 (1961).

(15) A. I. MARKUSHEVICH. "Theory of functions" Vol. 3 - Prentice Hall - Englewood Cliffs NJ (1967).

(16) E.C. TITSHMARSCH - "Theory of functions" Oxford University Press (1939).

(17) D.I. OLIVE - Nuov. Cim. 29, 327 (1963).

(18) G. SPRINGER - "An introduction to Riemann Surfaces" - Addison Wesley - Reading, Mass. (1957).

REFERENCES DU CHAPITRE I

(1) G.F. CHEW "The analytic S-matrix" Benjamin New-York (1966).

(2) D.I. OLIVE Nuov. Cim. 26, 73 (1962).

(3) R.G. NEWTON Journ. of Math. Phys. 2, 188 (1961).

(4) E.J. SQUIRES, in "Scottish Universities Summer School 1963" Oliver and Boyd - Edimburg 1964.

(5) D.I. OLIVE Nuov. Cim. 29 , 327 (1963).

(6) R.E. PEIERLS - Process of Roy. Soc. London, A 253, 16 (1959).
K.J. LE COUTEUR - Process of Roy. Soc. London, A 256, 115 (1960).

(7) A.I. MARKUSHEVICH - "Theory of functions of a complexe variable" Vol. III. Printice Hall NJ (1967).

REFERENCES DU CHAPITRE II

(1) G. SPRINGER "Introduction to Riemann Surfaces" - Addison-Wesley- New-York (1957).

(2) M. BENAYOUN et Ph. LERUSTE - P.A.M. 70-09 - Paris 1970.

(3) K.J. LE COUTEUR - Process of Roy. Soc. London A 256, 115, (1960).

(4) R.G. NEWTON - Journ. Of Math. Physics 2, 188 (1961).

(5) H.D. DAHMEN et A.S. REINER - Ann. of Phys. 44, 74 (1967).

(6) J.P. BJORKEN - Phys. Rev. Lett. 4, 473 (1961).
R.L. WARNOCK - Nuov. Cim. 50 A, 894 (1967).

(7) M. BENAYOUN, J. LANCIEN, Ph. LERUSTE, Nuov. Cim. 63 A, 969 (1969).

(8) R.G. NEWTON. "Scattering theory of waves and particles". Mac Graw Hill New-York (1966).

(9) Ph. LERUSTE - P.A.M. 66-11 - Paris octobre 1966.

REFERENCES DU CHAPITRE III

(1) Ph. LERUSTE et A. MALAMANT - P.A.M. 66-12, Paris 1966.

(2) M. BENAYOUN et Ph. LERUSTE - P.A.M. 70-01, Paris 1970

(3) H.D. DAHMEN et A.S. REINER - Ann. of Phys. 44, 74 (1967).

(4) Ph. LERUSTE et Z. STRACHMAN - "The $\bar{K}N$ low energy region and the $Y_o^*(1405)$ coupling constants" - Paris 1972.

REFERENCES DU CHAPITRE IV

(1) C. REBBI et R. SLANSKY - Phys. Rev. 185, 1838 (1969).

(2) Y. REBBI et M. KATO - Phys. Rev. 188, 2319 (1969).

(3) D. KEMP et al. - Nuov. Cim. Lett. 3, 257 (1972).

(4) G.F. CHEW "Analytic S-matrix" Benjamin - New-York (1966).

(5) J.W. MOFFAT - Nuov. Cim. Lett. 1, 546 (1972).

(6) M. GELL-MANN : Phys. Rev. Lett. 6, 263 (1962).
V.N. GRIBOV et Y.A. POMERANCHUK : Phys. Rev. Lett. 8, 343 (1962).

(7) J.M. CHARAPS et E.J. SQUIRES - Phys. Rev. 127, 1387 (1963).

(8) S.G. MIKHLIN "Integral équations" Pergamon Press (1959).

(9) J. GILLESPIE "Final State Interaction" Holden Day - San Francisco (1969).

(10) J.D. SPREE et C.C. OEHRING "Elements of Complex analysis" Addison Wesley New-York (1969).

(11) R.L. WARNOCK - Nuov. Cim. 50A, 894, (1967).

(12) M. KATO - Ann. of Phys. 31, 130 (1965).

REFERENCES DU CHAPITRE V

(1) G.E. EBEL et al. "Compilation of coupling constants and low energy parameters" in SPRINGER TRACTS in Modern Physics Vol. 55 - Heidelberg 1970.

(2) Ph. LERUSTE et Z. STRACHMAN "The $\bar{K}N$ low energie region and the $Y_o^*(1405)$ coupling constants" Paris 1972.

(3) R.H. DALITZ HR 7003 "Hyperon resonances 1970". Conference de Duke University - Durham North Carolina.

(4) M.H. ROSS et G.L. SHAW - Ann. of Phys. 13, 147 (1961). B.R. MARTIN : "Kaon-Nucleon interaction below 1 GeV/c" in SPRINGER TRACTS MODERN PHYSICS" Vol. 55 Heidelberg 1970.

(5) W.E. HEMPREY et R.R. ROSS - Phys. Rev. 127, 1305 (1968).
J.K. KIM - Phys. Rev. Lett. 14, 29 (1965).
J.K. KIM et VON HIPPEL - Phys. Rev. Lett. 20, 1303 (1968).
A.D. MARTIN et G.G. ROSS - Nucl. Phys. B 16, 476 (1970).
B.R. MARTIN et M. SAKITT - Phys. Rev. 183, 1349 et 1352 (1969). etc...

(6) G. RAJASEKARAN - Symposia on theoretical Physics and Mathematics - vol. 9 p. 43 - Plenum Press - New-York (1969).

(7) F. UCHIYAMA-CAMPBELL et R.K. LOGAN - Phys. Rev. 149, 1220 (1966).

REFERENCES DU CHAPITRE VI .

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

(1) R.H. DALITZ, HR 70 003 - "Hyperon resonance 1970". Conférence at Duke University. Durham, North Carolina.

(2) B. LEFIEVRE et Ph. LERUSTE, Nuov. Cim. 66 A, 349, (1970).

(3) Ph. LERUSTE et Z. STRACHMAN - "The Low Energy region and $Y_o^*(1405)$ coupling constants". Paris 1972.

(4) R.H. DALITZ et S.F. TUAN - Ann. of Phys. 3, 307 (1960).

(5) M.H. ROSS et G.L. SHAW - Ann. of Phys. 9, 391 (1960) ; 13, 147 (1961).

(6) W.E. HEMPHREY et R.R. ROSS - Phys. Rev. 127, 1305 (1968).

J.K. KIM et VON HIPPEL - Phys. Rev. Lett. 20, 1303 (1968).

A.D. MARTIN et G.G. ROSS - Nucl. Phys. B16, 479 (1970).

J. THOMSON - Communication à la Conférence de Duke University (Durham, North Carolina, 1970).

(7) "Kaon Nucleon Interaction below 1 GeV/c" Springer tracts in modern Physics-Vol. 55 Heidelberg (1970).

(8) M. NEVEU - Communication à la conférence de Physique des Hautes Energies-Aix-en-Provence (1970).

(9) G. SPRINGER - "Introduction to Riemann surfaces" Addison - Wesley - New-York (1957).

(10) Voir p. ex. R.G. NEWTON - Journ. of Math. Phys. 2, 188 (1961).

(11) P.N. DOBSON - Proceedings of Oxford International Conference (1965). Rutherford H.E. Laboratory p. 167.

(12) A.W. HENDRY et R.G.MOORHOUSE - Phys. Lett. 18, 171, (1965).

(13) F. UCHIYAMA-CAMPBELL et R.K. LOGAN - Phys. Rev. 149, 1220 (1966).

(14) M. KATO - Ann. of Phys. 188, 2319 (1965).

(15) R.K. LOGAN et H.W. WYLD - Phys. Rev. 158, 1464 (1967).

(16) D. CLINE, R. LAUMANN et J. MAPP - Phys. Rev. Lett. 26, 1194 (1967).

REFERENCES DU CHAPITRE VII

-:-:-:-:-:-:-:-:-

(1) T.D. LEE - Phys. Rev. 95, 1329 (1954).

(2) F. ZACHARIASEN - Phys. Rev. 121, 1851 (1961).

(3) R.E. PEIERLS - "Proceedings of Glasgow Conference on nuclear and meson physics" Perganion Press - New-York (1954).

(4) M. LEVY - Nuov. Cim. 13, 115 (1959) ; 14, 612, (1959).

(5) N. NAKANISHI - Prog. in theor. phys. 19, 607, (1959).

(6) J. GUNSON et J.G. TAYLOR - Phys. Rev. 119, 1121 (1960).

(7) C.R. HAGEN - Nuov. Cim. 50 A, 547 (1967).

(8) J.N. PASSI - Phys. Rev. D2, 310 (1970).

(9) B.W. LEE , K.T. MAHANTHAPPA , I.S. GERSTEIN, M.L. WHIPPMAN, Ann. Phys. 28, 446, (1964).

(10) T. AKIBA, S. SAITO, F. TAGAKI, Nuov. Cim. 39, 316 (1965).

(11) B. JOUVET et J.P. ADAM - Nuov. Cim. 29, 316 (1963).

(12) G. RAJASAKARAN "An Empirical test for composite hadrons" Tate Institute Preprint - Bombay (1971).

(13) B. JOUVET - Suppl. al Nuov. Cim. 2, 941 (1955). p. ex.

(14) G. KALLEN et W. PAULI - Dan. Math. Fys. Medd. 30 n° 7 (1955).

(15) S. SCHWEBER - An introduction to relativistie quantum field theory - Row Peterson - New-York.

B. DIU - "Qu'est-ce qu'une particule élémentaire ?" Masson Paris (1965).

(16) J.C. HOUARD - Thèse de Doctorat ès Sciences - Paris 1966.

(17) R.D. AMADO - "Brandeis Summer School in theoretical physics" (1967) vol. 2 Gordon at Breach - New-York (1970).

P.G. FEDERBUSCH - Phys. Rev. 148, 1556 (1966).

(18) J.C. HOUARD et J.C. LE GUILLOU - Nuov. Cim. 44, 484 (1966).

(19) B. JOUVET et J.C. HOUARD - Nuov. Cim. 18, 466 (1960).

(20) Y.S. JIN et W. MAC-DOWELL - Phys. Rev. 137B, 688 (1965).

(21) M. BENAYOUN et Ph. LERUSTE - Nuov. Cim. 6A, p. 442 (1971).

A P P E N D I C E A

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

SINGULARITES DE CERTAINES MATRICES MEROMORPHES

-:-

On se donne une matrice S, qui vérifie les conditions de l'hypothèse de causalité énoncée au chapitre 0 ; ses zéros et ceux de ses déterminants diagonaux sont donc isolés dans le domaine $G_c \cup \mathbb{R}_+$. Cette propriété va jouer un rôle fondamental dans la démonstration qui suit.

Soit une suite ordonnée finie de sous-ensembles de l'ensemble N des seuils ; on suppose qu'elle vérifie :

$$A_n \supseteq A_{n-1} \supseteq A_{n-2} \quad \ldots \quad \supseteq A_1 \quad .$$

Nous allons montrer que les seules singularités des matrices :

$$R_p = \left(\ldots \left(S^{-1}_{A_n} \right)^{-1}_{A_{n-1}} \ldots \right)^{-1}_{A_{n-p}} \qquad 0 \leq p \leq n-1 \ , \quad (1)$$

dans G_o et sur $\mathbb{R}_+$ sont parmi les zéros de certains des sous-déterminants diagonaux de la matrice S. Comme ceux-ci n'ont, par hypothèse, pas de points d'accumulation de zéros, il en résultera que les pôles des matrices (1) sont nécessairement isolés.

Pour simplifier l'écriture, on utilise la notation :

$$\Delta_P \equiv det_P(S) \equiv det S_P$$

I - UNE RELATION DETERMINANTALE.

1°/ - On doit d'abord rappeler que si R est une matrice carrée inversible dont les indices sont pris dans un ensemble N, on a :

$$\Delta(R^{-1}_M) = \frac{\Delta(R_{N-M})}{\Delta(R_N)} \ , \quad \forall M \in \mathcal{P}(N) \qquad (2)$$

Cette relation, fondamentale, est établie en appendice E.

2°/ - On va montrer que le déterminant de la matrice définie par (1), a pour expression :

$$\Delta\left[\left(\left(\ldots\left(S^{-1}_{A_n}\right)^{-1}_{A_{n-1}}\ldots\right)^{-1}_{A_{n-p+1}}\right)^{-1}_{A_{n-p}}\right] = \frac{\Delta_{A_n - A_{n-1} + \cdots + (-)^p A_{n-p}}}{\Delta_{A_n - A_{n-1} + \cdots + (-)^{p-1} A_{n-p+1}}} \quad (3)$$

En utilisant (2), on a successivement :

i) pour $p=1$, $\Delta\left[\left(S^{-1}_{A_n}\right)_{A_{n-1}}\right] = \frac{\Delta_{A_n - A_{n-1}}}{\Delta_{A_n}}$ (4-1)

ii) pour $p=2$, $\Delta\left[\left(\left(S^{-1}_{A_n}\right)^{-1}_{A_{n-1}}\right)_{A_{n-2}}\right] = \frac{\Delta_{A_n - A_{n-1} + A_{n-2}}}{\Delta_{A_n - A_{n-1}}}$ (4-2)

La relation(4-2) résulte de :

$$\Delta\left[\left(\left(S^{-1}_{A_n}\right)^{-1}_{A_{n-1}}\right)_{A_{n-2}}\right] = \frac{\Delta\left[\left(S^{-1}_{A_n}\right)_{A_{n-1} - A_{n-2}}\right]}{\Delta\left[\left(S^{-1}_{A_n}\right)_{A_{n-2}}\right]} \quad ; \quad (5)$$

il suffit d'appliquer aux numérateur et dénominateur la relation (2) pour obtenir (5).

3°/ - Supposons, qu'à l'ordre k, nous ayons :

$$\Delta\left[\left(\left(\ldots\left(S^{-1}_{A_n}\right)^{-1}_{A_{n-1}}\ldots\right)^{-1}_{A_{n-k+1}}\right)_{A_{n-k}}\right] = \frac{\Delta_{A_n - A_{n-1} + A_{n-2} + \cdots + (-)^k A_{n-k}}}{\Delta_{A_n - A_{n-1} + A_{n-2} - \cdots + (-)^{k-1} A_{n-k+1}}} \quad (6)$$

A l'ordre k+1 nous avons :

$$\Delta\left[\left(\left(\ldots\left(S^{-1}_{A_n}\right)^{-1}_{A_{n-1}}\ldots\right)^{-1}_{A_{n-k}}\right)_{A_{n-k-1}}\right] = \frac{\Delta\left[\left(\left(\ldots\left(S^{-1}_{A_n}\right)^{-1}_{A_{n-1}}\ldots\right)^{-1}_{A_{n-k+1}}\right)_{A_{n-k}-A_{n-k-1}}\right]}{\Delta\left[\left(\ldots\left(S^{-1}_{A_n}\right)^{-1}_{A_{n-1}}\ldots\right)_{A_{n-k}}\right]} \quad (7)$$

Comme

$$B_{n-k} = A_{n-k} - A_{n-k-1}$$

vérifie

$$A_n \geq A_{n-1} \geq \cdots \geq A_{n-k+1} \geq B_{n-k} ,$$

nous avons, en vertu de la récurrence même :

$$\Delta\left[\left(\left(\ldots\left(S_{A_n}^{-1}\right)_{A_{n-1}}^{-1}\ldots\right)_{A_{n-k+1}}^{-1}\right)_{A_{n-k}-A_{n-k-1}}\right] = \frac{\Delta_{A_n - A_{n-1} + \cdots + (-)^k B_{n-k}}}{\Delta_{A_n - A_{n-1} \cdots + (-)^{k-1} A_{n-k+1}}} \qquad (7')$$

qui est égale à l'expression suivante :

$$\frac{\Delta_{A_n - A_{n-1} + \cdots + (-)^{k+1} A_{n-k-1}}}{\Delta_{A_n - A_{n-1} + \cdots + (-)^{k-1} A_{n-k+1}}} \qquad (7'')$$

En portant (7") et (6) dans (7), on obtient enfin :

$$\Delta\left[\left(\left(\ldots\left(S_{A_n}^{-1}\right)_{A_{n-1}}^{-1}\ldots\right)_{A_{n-k}}^{-1}\right)_{A_{n-k+1}}\right] = \frac{\Delta_{A_n - A_{n-1} + \cdots + (-)^{k+1} A_{n-k-1}}}{\Delta_{A_n - A_{n-1} + \cdots + (-)^{k} A_{n-k}}} \qquad (8)$$

qui démontre la récurrence. Il suit que la relation (3) est vérifiée pour tout $p \geq 1$.

I - LES SINGULARITES DES MATRICES DEFINIES PAR LA RELATION (1).

Pour trouver le résultat dans le cas général, il nous faut encore procéder par récurrence. On définit auparavant les nombres entiers :

$$a_k = \text{Card}(A_k) \quad \text{et} \quad b_k = a_{k-1} \quad , \forall k : n-p \leq k \leq n . \qquad (9)$$

i) Cas $p=0$ dans la relation (1).

On a :

$$S_{A_n}^{-1} = \frac{1}{\Delta_{A_n}} \mathcal{H}^{(n)} \quad , \qquad (10)$$

où $\mathcal{M}^{(n)}$ est la matrice des mineurs algébriques de S_{A_n}. Comme S -c'est-à-dire, ses éléments- sont des fonctions analytiques dans G_o et continues sur $\mathbb{R}_+$, il en est de même de $\mathcal{M}^{(n)}$; par suite, les seuls pôles de $S_{A_n}^{-1}$ sont les zéros de :

$$\Delta_{A_n} \ .$$

ii) Cas $p=1$ dans la relation (1).

En utilisant la relation (3), on trouve :

$$\left(S_{A_n}^{-1}\right)^{-1}_{A_{n-1}} = \frac{\Delta_{A_n}}{\Delta_{A_n - A_{n-1}}} \mathcal{M}^{(n-1)} \qquad (11)$$

où $\mathcal{M}^{(n-1)}$ est la matrice des mineurs algébriques de $\left(S_{A_n}^{-1}\right)_{A_{n-1}}$. La relation (10) et les définitions (9) montrent que $\mathcal{M}^{(n-1)}$ a la forme :

$$\mathcal{M}^{(n-1)} = \left(\frac{1}{\Delta_{A_n}}\right)^{b_{n-1}} \mathcal{M}_1^{(n-1)} \qquad (12)$$

$\mathcal{M}_1^{(n-1)}$ étant une matrice fonction holomorphe dans G_o et continue sur $\mathbb{R}_+$.
En portant (12) dans (11), on obtient finalement :

$$\left(S_{A_n}^{-1}\right)^{-1}_{A_{n-1}} = \frac{\Delta_{A_n}}{\Delta_{A_n - A_{n-1}}} \left(\frac{1}{\Delta_{A_n}}\right)^{b_{n-1}} \mathcal{M}_1^{(n-1)} \ . \qquad (13)$$

Cette expression indique clairement que les seuls pôles possibles de $\left(S_{A_n}^{-1}\right)^{-1}_{A_{n-1}}$ sont les zéros de :

$$\Delta_{A_n} \qquad \text{et} \qquad \Delta_{A_n - A_{n-1}} \ .$$

Ceci n'exclut évidemment pas d'éventuelles compensations de ces pôles par des zéros de $\mathcal{M}_1^{(n-1)}$.

iii) En prenant $p=2$ dans la relation (1), on trouverait de la même façon :

$$\left(\left(S_{A_n}^{-1}\right)^{-1}_{A_{n-1}}\right)^{-1}_{A_{n-2}} = \left(\frac{\Delta_{A_n - A_{n-1}}}{\Delta_{A_n - A_{n-1} + A_{n-2}}}\right)\left(\frac{\Delta_{A_n}}{\Delta_{A_n - A_{n-1}}}\right)^{b_{n-2}}\left(\frac{1}{\Delta_{A_n}}\right)^{b_{n-2}\cdot b_{n-1}} \mathcal{M}_1^{(n-2)} \qquad (14)$$

où $\mathcal{H}_1^{(n-2)}$ est une matrice fonction de s, holomorphe dans G_o et continue sur $\mathbb{R}_+$. La relation (14) ci-dessus montre donc que les seuls pôles de $\left(\left(S_{A_n}^{-1}\right)_{A_{n-1}}^{-1}\right)_{A_{n-2}}^{-1}$ sont les zéros de :

$$\Delta_{A_n} \quad , \quad \Delta_{A_n - A_{n-1}} \quad , \quad \Delta_{A_n - A_{n-1} + A_{n-2}}$$

iv) On peut regrouper les expressions (11), (13) et (14) dans la même formule :

$$\left(\ldots\left(S_{A_n}^{-1}\right)_{A_{n-1}}^{-1}\ldots\right)_{A_{n-p}}^{-1} = \frac{\Delta_{R_{n-p+1}}}{\Delta_{R_{n-p}}}\left\{\prod_{r=0}^{p=1}\left(\frac{\Delta_{R_{n-r+1}}}{\Delta_{R_{n-r}}}\right)^{\prod_{r'=r+1}^{p} b_{n-r'}}\right\}\mathcal{H}_1^{(n-p)} \qquad (15)$$

où $\mathcal{H}_1^{(n-p)}$ est une matrice fonction holomorphe de s dans G_o et continue sur $\mathbb{R}_+$. Les notations introduites dans (15) sont fixées par (9) et par :

$$R_{n-k} = \dot{\sum_{i=k}^{n}} A_i \qquad (16)$$

Nous allons supposer la relation (15) vraie jusqu'à un ordre p fixé et la démontrer pour l'ordre suivant, $p+1$.

On a, en utilisant (3) :

$$\left(\left(\ldots\left(S_{A_n}^{-1}\right)_{A_{n-1}}^{-1}\ldots\right)_{A_{n-p}}^{-1}\right)_{A_{n-p-1}}^{-1} = \frac{\Delta_{A_n - A_{n-1} + \ldots + (-1)^p A_{n-p}}}{\Delta_{A_n - A_{n-1} + \ldots + (-1)^{p+1} A_{n-p-1}}}\mathcal{H}^{(n-p-1)} \qquad (17)$$

où $\mathcal{H}^{(n-p-1)}$ est la matrice des mineurs de :

$$\left(\left(\ldots\left(S_{A_n}^{-1}\right)_{A_{n-1}}^{-1}\ldots\right)_{A_{n-p}}^{-1}\right)_{A_{n-p-1}} .$$

Avec l'expression (15), on trouve que :

$$\mathcal{H}^{(n-p-1)} = \left(\frac{\Delta_{R_{n-p+1}}}{\Delta_{R_{n-p}}}\right)^{b_{n-p-1}}\left[\prod_{r=0}^{p-1}\left(\frac{\Delta_{R_{n-r+1}}}{\Delta_{R_{n-r}}}\right)^{\prod_{r'=r+1}^{p} b_{n-p-1}}\right]\mathcal{H}_1^{(n-p-1)} , \qquad (18)$$

où $\mathcal{M}_1^{(n-p-1)}$ est holomorphe dans G_o et continue sur $\mathbb{R}_+$. Mais, celle-ci est aussi la matrice des mineurs de :

$$\left(\mathcal{M}_1^{(n-p)} \right)_{A_{n-p-1}} .$$

Comme nous avons l'égalité :

$$\frac{\Delta_{A_n - A_{n-1} + \cdots + (-1)^p A_{n-p}}}{\Delta_{A_n - A_{n-1} + \cdots + (-1)^{p+1} A_{n-p-1}}} = \frac{\Delta_{R_{n-p}}}{\Delta_{R_{n-p-1}}} \quad , \tag{19}$$

en portant (18) dans (17) compte tenu de (19), on trouve que $\left(\cdots \left(S^{-1}_{A_n} \right)^{-1}_{A_{n-1}} \cdots \right)^{-1}_{A_{n-p-1}}$ vérifie la relation (15) où on change p en $p+1$.

v) Ainsi, les seuls pôles de :

$$\left(\cdots \left(S^{-1}_{A_n} \right)^{-1}_{A_{n-1}} \cdots \right)^{-1}_{A_{n-p}} \tag{20}$$

sont nécessairement parmi les zéros de :

$$\Delta_{A_n} \, , \, \Delta_{A_n \to A_{n-1}} \, , \cdots , \, \Delta_{A_n - A_{n-1} + \cdots + (-1)^p A_{n-p}}$$

Comme par hypothèse, les zéros de ces déterminants sont isolés, il s'en suit que les singularités de la matrice (20), dans G_o et sur $\mathbb{R}_+$ sont nécessairement isolées.

o

o o

A P P E N D I C E B

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

LES PROLONGEMENTS ANALYTIQUES DE S ; CAS DE L'UNITARITE PHYSIQUE.

-:-

I - RAPPELS.

On appelle G_o le plan complexe de s coupé à droite et aux singularités de gauche. On note $\mathbb{R}_+$ la région physique entière et I_μ l'ouvert de la région physique limité par le plus haut des seuils de M et celui de N qui le suit immédiatement ; si M est égal à N ce second seuil est remplacé par le point à l'infini du plan de s.

Nous avons vu que les relations analytiques d'unitarité physiques pouvaient être écrites :

$$S_M \cdot \mathcal{L}_\mu S_M = 1 \qquad \forall M \in \mathcal{P}_p(N) \quad , \qquad (1)$$

les deux fonctions dans (1) étant prises au même point s de G_o. Elles sont aussi prolongement analytique l'une de l'autre à travers I_μ. On note par $\mathcal{L}_\mu$ l'opérateur de prolongement analytique à travers I_μ en venant du demi-plan inférieur de G_o et $\mathcal{L}_\mu^{-1}$, son inverse, est le prolongement à travers le même ouvert en venant du demi-plan supérieur de G_o ; ceci est conforme aux conventions du chapitre O.

De (1) on déduit aisément :

$$\mathcal{L}_\mu^2 S_M = S_M \quad , \quad \mathcal{L}_\mu S_M = \mathcal{L}_\mu^{-1} S_M = S_M^{-1} \quad , \forall s \in G_o \qquad (2)$$

Considérons le prolongement analytique de S_M à travers une suite d'ouverts I_λ de la région physique ; si une telle suite a un sens, on la symbolisera par $\mathcal{L}_\chi$. $\mathcal{L}_\chi$ est donc un produit d'opérateurs $\mathcal{L}_R^{\pm 1}$ $\left(R \in \mathcal{P}_p(N) \right)$. Nous avons supposé que ces opérateurs $\mathcal{L}_\lambda$, appliqués sur S_M, sont tels que $\mathcal{L}_\chi S_M$ vérifie la propriété Ψ suivante :

$\Psi \equiv \{$ $\mathcal{L}_\chi S_M$ et $(\mathcal{L}_\chi S_M)^{-1}$ sont méromorphes dans G_o et ont une limite continue au sens large sur $\mathbb{R}_+$, qu'on vienne du demi-plan supérieur de G_o ou du demi-plan inférieur.$\}$

La propriété Ψ implique donc que $\alpha_x S_M$ n'a de zéros et de pôles qu'isolés dans G_o et sur $\mathbb{R}_+$, de quelque côté qu'on prenne la limite.

On a postulé l'existence, pour les fonctions $\alpha_x S_M$ vérifiant Ψ, des relations suivantes :

$$\alpha_x S_M \cdot \alpha_\mu \alpha_x S_M = 1 \qquad (3)$$

qu'on appelle "relations analytiques d'unitarité non physique" (UNP).

Pour S_M, il existe au moins deux opérateurs α_x tels que (3) soit vérifiée :

$$\alpha_\phi \ , \ \alpha_\mu$$

α_ϕ étant associé au prolongement le long d'un chemin fermé ne traversant jamais $\mathbb{R}_+$:

$$\alpha_\phi S_M = S_M \ .$$

II - <u>PREMIERES CONSEQUENCES DE L'UNITARITE NON PHYSIQUE</u>.

Soit α_x un opérateur de prolongement analytique tel que Ψ soit vérifiée, il résulte de (3) que :

$$\alpha_\mu \alpha_x S_M = (\alpha_x S_M)^{-1} \ ,$$

est le prolongement analytique à travers I_μ de $\alpha_x S_M$. C'est aussi une fonction vérifiant la propriété Ψ .

On peut prolonger la relation d'unitarité physique par α_x, et puisque $\alpha_x S_M$ vérifie Ψ, on a :

$$\alpha_x S_M \cdot \alpha_x \alpha_\mu S_M = 1 \ . \qquad (4)$$

La comparaison de (3) et (4) donne :

$$\alpha_\mu \alpha_x S_M = \alpha_x \alpha_\mu S_M \qquad \forall s \in G_o \ . \qquad (5)$$

En utilisant les propriétés (2), les relations (3) et (5), on obtient :

$$\alpha_x \alpha_\mu^2 S_M = \alpha_\mu^2 \alpha_x S_M = \alpha_\mu \alpha_x \alpha_\mu S_M = \alpha_x S_M \ . \qquad (6)$$

Cette relation peut être itérée et, compte tenu de (5) on obtient aisément :

$$\alpha_\mu^{p_1}\alpha_x\alpha_\mu^{p_2}S_M = \alpha_\mu^{p_1+p_2}\alpha_x S_M = \alpha_x\alpha_\mu^{p_1+p_2}S_M = \begin{cases} \alpha_x S_M & \text{si } p_1+p_2 = 2q \\ (\alpha_x S_M)^{-1} & \text{si } p_1+p_2 = 2q+1 \end{cases} \quad (7)$$

Donc, s'il existe un opérateur α_x tel que $\alpha_x S_M$ vérifie Ψ, on en a une infinité qui se subdivise en deux classes, définies par (7).

Il s'agit à présent de trouver quels sont les opérateurs tels que α_x satisfasse Ψ.

III - EXPRESSION DE CERTAINS PROLONGEMENTS ANALYTIQUES DE S_M.

Soit une suite finie ordonnée d'ensembles physiques de seuils contenant M :

$$A_n \geqslant A_{n-1} \dots \geqslant A_1 \geqslant M \quad . \qquad (8)$$

Nous allons montrer que la fonction :

$$\alpha_{\alpha_n} \dots \alpha_{\alpha_1} S_M \qquad (8')$$

vérifie la propriété Ψ. La fonction (8') -si elle existe- est l'élément terminal d'une chaine de prolongements analytiques directs :

$$S_n \xrightarrow{I_{\alpha_1}} \alpha_{\alpha_1} S_M \xrightarrow{I_{\alpha_2}} \alpha_{\alpha_2}\alpha_{\alpha_1} S_M \longrightarrow \dots \xrightarrow{I_{\alpha_n}} \alpha_{\alpha_n}\dots\alpha_{\alpha_1} S_M . \qquad (9)$$

Ce qui va précisément être démontré est que (8') a l'expression suivante :

$$\alpha_{\alpha_n}\dots\alpha_{\alpha_1} S_M = \left[\left(\dots \left(S_{A_n}^{-1} \right)^{-1}_{A_{n-1}}, \dots \right)^{-1}_{A_1} \right]_M \quad ; \qquad (10)$$

la fonction dans le membre de droite de (10), nous l'avons démontré, est une fonction analytique dans G_o et continue au sens large sur $\mathbb{R}_+$ (plus précisément ; des deux côtés de $\mathbb{R}_+$), elle vérifie donc Ψ.

Le procédé que nous allons employer pour montrer le résultat (10) est une récurrence.

1°/ - Les relations d'unitarité physique donnent :

$$S_{A_i} \cdot \alpha_{\alpha_i} S_{A_i} = \mathbb{1} \qquad \forall\ A_i \in \mathcal{P}_1(N) . \qquad (11)$$

La relation (11) définit les prolongements $\alpha_{\alpha_i} S_M$ de S_M, puisque :

$$\alpha_{\alpha_i} S_M \equiv \left[\alpha_{\alpha_i} S_{A_i} \right]_M \quad , \tag{12}$$

et :

$$\alpha_{\alpha_i} S_M = \left(S_{A_i}^{-1} \right)_M \quad , \forall i = 1, \ldots, n \tag{13}$$

2°/ - La relation (11) donne, en particulier :

$$\alpha_{\alpha_2} S_{A_2} = S_{A_2}^{-1} \tag{14}$$

qui, tout comme :

$$\alpha_{\alpha_2} S_{A_1} \equiv \left(\alpha_{\alpha_2} S_{A_2} \right)_{A_1} \tag{15}$$

vérifie la propriété Ψ. On peut donc appliquer UNP à la fonction (15) et obtenir :

$$\alpha_{\alpha_2} \alpha_{\alpha_1} S_{A_1} = \left(S_{A_2}^{-1} \right)_{A_1}^{-1} \tag{16}$$

qui vérifie elle aussi Ψ , puisque toute fonction du type

$$\left(\ldots \left(S_{A_n}^{-1} \right)_{A_{n-1}}^{-1} \ldots \right)_{A_{n-p}}^{-1} \tag{17}$$

est méromorphe dans G_o et continue au sens large sur $\mathbb{R}_+$. De (16) on tire :

$$\alpha_{\alpha_2} \alpha_{\alpha_1} S_M = \left[\left(S_{A_2}^{-1} \right)_{A_1}^{-1} \right]_M \quad . \tag{18}$$

Il convient de remarquer que la formule (16) et le fait qu'elle vérifie Ψ se conservent quand on remplace A_1 et A_2 (donc α_1 et α_2) par A_i et A_j (donc α_i et α_j) en supposant :

$$i \leq j \, .$$

3°/ - De la même façon qu'en (15) :

$$\alpha_{\alpha_3} S_{A_3} = S^{-1}_{A_3}$$

et

$$\alpha_{\alpha_3} S_{A_2} = \left(S^{-1}_{A_3} \right)_{A_2}$$

vérifient la propriété Ψ ; on peut donc appliquer UNP à cette dernière fonction et obtenir :

$$\alpha_{\alpha_3} \alpha_{\alpha_2} S_{A_2} = \left(S^{-1}_{A_3} \right)^{-1}_{A_2} \quad . \tag{19}$$

Cette matrice-fonction et :

$$\alpha_{\alpha_2} \alpha_{\alpha_2} S_{A_1} = \left(\left(S^{-1}_{A_3} \right)^{-1}_{A_2} \right)_{A_1} \tag{20}$$

vérifient la propriété Ψ . On peut ainsi appliquer à (20) l'unitarité non physique et, par suite, on tire :

$$\alpha_{\alpha_3} \alpha_{\alpha_2} \alpha_{\alpha_1} S_{A_1} = \left(\left(S^{-1}_{A_3} \right)^{-1}_{A_2} \right)^{-1}_{A_1} \tag{21}$$

qui est aussi une fonction véfifiant Ψ .

Comme en 2°/ ci-dessus, les indices 1, 2 et 3 dans (21) peuvent être remplacés respectivement par i, j et k pourvu que :

$$i \leq j \leq k$$

4°/ - Les expressions (13), (18) et (21) conduisent à la relation :

$$\alpha_{\alpha_p} \ldots \alpha_{\alpha_1} S_{A_1} = \left(\ldots \left(S^{-1}_{A_p} \right)^{-1}_{A_{p-1}} \ldots \right)^{-1}_{A_1} \quad , \quad 1 \leq p \leq n-1 \tag{22}$$

qui définit le prolongement de S_{A_1} (donc S_M) le long d'une suite ordonnée de chemins associés à des ensembles physiques. Nous allons supposer que (22) est vraie et démontrer qu'elle le reste si :

$$p = n \quad .$$

Démonstration de la récurrence.

Comme les indices des ensembles A_i dans (22) sont muets , la récurrence implique que cette formule reste vraie pour tout produit de k opérateurs associés à k des ensembles A_i. Ainsi (22) donne aussi certains

des prolongements de S_{A_1} quand le dernier opérateur est $\mathcal{L}_{\alpha_n}$. Donc, pour prouver la récurrence il suffit de montrer que :

$$\mathcal{L}_{\alpha_n} \ldots \mathcal{L}_{\alpha_1} S_{A_1} = \left(\ldots \left(S_{A_n}^{-1} \right)_{A_{n-1}}^{-1} \ldots \right)_{A_1}^{-1} \qquad (23)$$

Mais, de la récurrence et de la remarque qui précède, on tire :

$$\mathcal{L}_{\alpha_n} \ldots \mathcal{L}_{\alpha_2} S_{A_2} = \left(\ldots \left(S_{A_n}^{-1} \right)_{A_{n-1}}^{-1} \ldots \right)_{A_2}^{-1} \qquad (24)$$

qui, comme :

$$\mathcal{L}_{\alpha_n} \ldots \mathcal{L}_{\alpha_2} S_{A_1} \equiv \left[\mathcal{L}_{\alpha_n} \ldots \mathcal{L}_{\alpha_2} S_{A_2} \right]_{A_1} \qquad (25)$$

vérifie la propriété Ψ. On peut alors appliquer l'unitarité non physique à (25) et obtenir :

$$\mathcal{L}_{\alpha_n} \ldots \mathcal{L}_{\alpha_1} S_{A_1} = \left(\ldots \left(S_{A_n}^{-1} \right)_{A_{n-1}}^{-1} \ldots \right)_{A_1}^{-1} , \qquad (26)$$

ce qui achève la récurrence.

Enfin, (26) donne aisément :

$$\mathcal{L}_{\alpha_n} \ldots \mathcal{L}_{\alpha_1} S_M = \left[\left(\ldots \left(S_{A_n}^{-1} \right)_{A_{n-1}}^{-1} \ldots \right)_{A_1}^{-1} \right]_M , \qquad (27.1)$$

et par unitarité non physique :

$$\mathcal{L}_{\alpha_n} \ldots \mathcal{L}_{\alpha_1} \mathcal{L}_{\beta} S_M = \left[\left(\ldots \left(S_{A_n}^{-1} \right)_{A_{n-1}}^{-1} \ldots \right)_{A_1}^{-1} \right]_M^{-1} . \qquad (27.2)$$

5°/ - La relation (10), que nous venons de démontrer par récurrence, donne l'expression du prolongement analytique de S_M le long d'une suite ordonnée finie de chemins dans le plan de s associés à des ensembles physiques. Cette conclusion ne dépend pas du fait que la série des inclusions dans :

$$A_n \geqslant A_{n-1} \ldots\ldots \geqslant A_1 \geqslant M , \qquad (28)$$

soit stricte, ou entendue au sens large. Par suite (10) -ou (27)- définit aussi les prolongements :

$$\mathcal{L}_{\alpha_n}^{p_n} \dots \mathcal{L}_{\alpha_1}^{p_1} S_M \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_{\alpha_n}^{p_n} \dots \mathcal{L}_{\alpha_1}^{p_1} \mathcal{L}_{\beta}^{p_0} S_M \,. \tag{29}$$

de la matrice S. Les nombres p_0, p_1, p_2, ... p_n sont, dans (29), des entiers relatifs. Mais alors, les expressions (27) montrent que tout prolongement du type (29) de S_M coïncide avec le prolongement par une suite finie ordonnée d'opérateurs $\mathcal{L}_{\alpha_i}$, tous différents les uns des autres :

$$\mathcal{L}_{\alpha_n}^{p_n} \dots \mathcal{L}_{\alpha_1}^{p_1} S_M = \mathcal{L}_{\alpha_m} \dots \mathcal{L}_{\alpha_p} S_M \,. \tag{30}$$

L'opérateur $\mathcal{L}_{\alpha_i}$ apparaîtra dans le second membre de (30) si p_i est impair, autrement il n'y figurera pas.

L'ensemble M étant donné, les prolongements analytiques différents de S_M ayant la forme (29) sont donc au nombre de 2^{n-m+1} ; celui-ci n'est que le cardinal de l'ensemble :

$$\left\{ \{\emptyset\}, M, M \cup \{\Delta_{2m}\}, M \cup \{\Delta_{2m}, \Delta_{2m+1}\}, \dots, N = M \cup \{\Delta_{2m}, \dots, \Delta_{2n-1}\} \right\}$$

IV - COMMUTATIVITE DES PRODUITS D'OPERATEURS.

La propriété de commutativité des opérateurs de prolongement analytique (associés à S_M) que nous venons de voir, résulte de l'unitarité non physique et des formules prolongements de S_M que nous avons déjà construit. Elle peut être établie pas à pas dans le cours du paragraphe III ci-dessus, bien que nous l'en ayons séparée.

IV.1 - Commutativité des produits de chemins physiques.

1°/ - Comme $\mathcal{L}_{\alpha_n}^{p_n} S_{A_n}$ vérifie la propriété Ψ, on peut lui appliquer UNP ; on obtient alors :

$$\mathcal{L}_{\alpha_n}^{p_n} \mathcal{L}_{\alpha_{n-1}}^{p_{n-1}} S_{A_{n-1}} = \mathcal{L}_{\alpha_{n-1}}^{p_{n-1}} \mathcal{L}_{\alpha_n}^{p_n} S_{A_{n-1}} \,, \quad \forall\, p_{n-1}, p_n \,. \tag{31}$$

Si on prolonge les deux membres de cette relation par $\mathcal{L}_{\alpha_n}^{q_n}$:

$$\mathcal{L}_{\alpha_n}^{p_n+q_n} \mathcal{L}_{\alpha_{n-1}}^{p_{n-1}} S_{A_{n-1}} = \mathcal{L}_{\alpha_n}^{q_n} \mathcal{L}_{\alpha_{n-1}}^{p_{n-1}} \mathcal{L}_{\alpha_n}^{p_n} S_{A_{n-1}} \,. \tag{32}$$

Comme (32) existe en vertu de (31) puisque la valeur de p_n est arbitraire, on peut appliquer UNP à ses deux membres et obtenir :

$$\mathcal{L}_{d_n}^{p_n+q_n}\,\mathcal{L}_{d_{n-1}}^{p_{n-1}+q_{n-1}}\,S_{A_{n-1}} = \mathcal{L}_{d_n}^{q_n}\,\mathcal{L}_{d_{n-1}}^{q_{n-1}}\,\mathcal{L}_{d_n}^{p_n}\,\mathcal{L}_{d_{n-1}}^{p_{n-1}}\,S_{A_{n-1}} \qquad (33)$$

Ceci nous conduit à supposer que :

$$\mathcal{L}_{d_n}^{c}\,\mathcal{L}_{d_{n-1}}^{d}\,S_{A_{n-1}} = \mathcal{L}_{d_{n-1}}^{d}\,\mathcal{L}_{d_n}^{c}\,S_{A_{n-1}} = \mathcal{L}_{d_n}^{c_1}\,\mathcal{L}_{d_{n-1}}^{d_1}\cdots\mathcal{L}_{d_n}^{c_m}\,\mathcal{L}_{d_{n-1}}^{d_m}\,S_{A_{n-1}} \qquad (34)$$

où $c_1, \ldots, c_m$, $d_1, \ldots, d_m$ sont des entiers arbitraires qui vérifient :

$$c = c_1 + c_2 + \ldots + c_m \quad ; \quad d = d_1 + \ldots + d_m \ .$$

En prolongeant (associativement) cette relation par $\mathcal{L}_{d_n}^{c_{m+1}}$ et $\mathcal{L}_{d_{n-1}}^{d_{m+1}}$ et en utilisant (32), il est facile de voir que :

$$\mathcal{L}_{d_n}^{c+c_{m+1}}\,\mathcal{L}_{d_{n-1}}^{d+d_{m+1}}\,S_{A_{m+1}} = \mathcal{L}_{d_n}^{c_1}\,\mathcal{L}_{d_{n-1}}^{d_1}\cdots\mathcal{L}_{d_n}^{c_{m+1}}\,\mathcal{L}_{d_{n-1}}^{d_{m+1}}\,S_{A_{n-1}} \ . \qquad (35)$$

Nous disposons ainsi de la commutativité des puissances de deux opérateurs de prolongement analytique, associés à des ensembles physiques de seuils.

En passant à la sous-matrice $S_{A_{n-2}}$ l'unitarité non physique nous permet de démontrer la commutativité du produit de puissances de :

$$\mathcal{L}_{d_n}\ ,\ \mathcal{L}_{d_{n-1}}\ ,\ \mathcal{L}_{d_{n-2}}$$

2°/ - Supposons alors que le produit de puissances des opérateurs

$$\mathcal{L}_{d_n}\ ,\ \ldots\ ,\ \mathcal{L}_{d_{n-m+1}}$$

ait la propriété de commutativité complète pour $S_{A_{n-m+1}}$; nous allons montrer qu'il en est de même pour :

$$\mathcal{L}_{d_n}\ ,\ \ldots\ ,\ \mathcal{L}_{d_{n-m}}$$

quand ils sont appliqués à $S_{A_{n-m}}$ et de ce fait nous aurons prouvé par récurrence la propriété de commutativité cherchée.

Comme notre hypothèse est la commutativité du produit d'opérateurs dans :

$$\mathcal{L}_{d_n}^{p_n}\,\mathcal{L}_{d_{n-1}}^{p_{n-1}}\cdots\mathcal{L}_{d_{n-m+1}}^{p_{n-m+1}}\,S_{A_{n-m+1}} \ , \qquad (36)$$

nous l'avons aussi dans :

$$\lambda_{\alpha_n}^{p_n} \dots \lambda_{\alpha_{n-m+1}}^{p_{n-m+1}} S_{A_{n-m}} \quad , \tag{37}$$

qui n'est qu'une sous-matrice de (36).

Posons :

$$\begin{cases} \lambda_{x_k} \equiv \lambda_{\alpha_n}^{p_n^{(k)}} \dots \lambda_{\alpha_{n-m+1}}^{p_{n-m+1}^{(k)}} \\ \lambda_x \equiv \lambda_{\alpha_n}^{p_n} \dots \lambda_{\alpha_{n-m+1}}^{p_{n-m+1}} \end{cases} .$$

L'hypothèse de la récurrence revient à écrire que le produit dans le second membre de :

$$\lambda_x S_{A_{n-m}} \equiv \lambda_{x_q} \dots \lambda_{x_1} S_{A_{n-m}} \quad , \tag{38}$$

est entièrement commutatif. On peut appliquer UNP à $\lambda_x S_{A_{n-m}}$ et en utilisant l'associativité du produit de chemins, on tire :

$$\lambda_{\alpha_{n-m}}^{p_1} \lambda_x \lambda_{\alpha_{n-m}}^{p_2} S_{A_{n-m}} = \lambda_{\alpha_{n-m}}^{p_1+p_2} \lambda_x S_{A_{n-m}} \; ; \tag{39}$$

il y a donc commutativité de toute puissance de $\lambda_{\alpha_{n-m}}$ avec λ_x.

Si on remplace λ_x par son développement :

$$\lambda_{x_q} \dots \lambda_{x_1}$$

dans (39), on voit que le produit $\lambda_{\alpha_{n-m}}^{p} \lambda_x$ est entièrement commutatif pour $S_{A_{n-m}}$ (donc pour S_M) puisque tout produit $\lambda_{x_r} \dots \lambda_{x_1}$ $(r \leq q)$ va vérifier (39).

Ainsi, le produit de puissances des opérateurs de prolongement associés aux ensembles A_j :

$$A_n \supset A_{n-1} \dots \supset A_1 \supset M$$

est entièrement commutatif et, dans ces conditions, le prolongement de S_M le long d'une suite quelconque de chemins physiques coïncide avec le prolongement le long d'une suite ordonnée de tels chemins.

V - COMMUTATIVITE GENERALE.

Considérons une suite finie de parties T_i de N qui vérifient :

$$\forall T_i \ , \exists Q \in \mathcal{P}(N-M) : \quad T_i = Q \quad \text{ou} \quad T_i = Q + M \ , \tag{40}$$

M étant un ensemble physique fixé. Supposons de plus que tout ensemble T_i vérifie :

$$\forall 2^r, 2^p \in T_i \ , r \leq p : \forall q \ , \ r \leq q \leq p \ , \ 2^q \in T_i \ ; \tag{41}$$

donc si deux seuils appartiennent à T_i, tout seuil intermédiaire en fait aussi partie.

On voit que le prolongement de S_M le long de tout chemin ne traversant pas l'ouvert :

$$] s_1 \ , s_{2m-1} [\ ,$$

s'il existe, peut être écrit sous la forme :

$$\alpha_{\theta_m}^{r_m} \ldots \alpha_{\theta_1}^{r_1} S_M \ . \tag{42}$$

Soit M_1 un ensemble physique tel que :

$$M_1 = M_2 \cup T_1 \ ,$$

où M_2 est aussi un physique contenant M, tel que :

$$T_1 \cap M_2 = \phi \ .$$

Nous savons qu'on peut définir le prolongement de S_M :

$$\alpha_{\mu_1}^{r_1} \alpha_{\mu_2}^{r_1} S_M \equiv \left(\alpha_{\theta_1} \alpha_{\mu_2}\right)^{r_1} \alpha_{\mu_2}^{r_1} S_M \ ; \tag{43}$$

en utilisant la commutativité des opérateurs de prolongement associés aux parties physiques de N et :

$$\alpha_{\mu_1}^{2} S_M = S_M \qquad , \forall M_1 \in \mathcal{P}_p(N) \quad , \ M \leq M_1 \ ,$$

il est facile de voir que :

$$\mathcal{L}_{\theta_1}^{r_1} S_M = (\mathcal{L}_{\theta_1} \mathcal{L}_{\mu_2})^{r_1} \mathcal{L}_{\mu_2}^{r_1} S_M \quad , \tag{44}$$

et cela montre que ce prolongement existe et a une forme du type (27). Par récurrence on prouverait la même assertion pour la fonction (42). Il s'agit de montrer enfin que le produit des opérateurs dans (42) est commutatif. Comme la récurrence est évidente (elle est analogue à la méthode développée au § IV en dessus) nous n'allons en reproduire que le début.

Soit T_1 et T_2 deux ensembles qui vérifient (41), A_1 et A_2 deux parties physiques de N contenant M et telles que :

$$T_i \cap A_i = \phi \quad ; \quad B_i = T_i \cup A_i \quad , \quad B_i \in \mathcal{P}_P(N) \quad , \quad i = 1,2 .$$

En tenant compte des résultats déjà acquis, on a successivement :

$$\mathcal{L}_{\theta_2}^{r_2} \mathcal{L}_{\theta_1}^{r_1} S_M = \mathcal{L}_{\theta_2}^{r_2} \mathcal{L}_{\theta_1}^{r_1} \mathcal{L}_{\alpha_1}^{2r_1} S_M = \dots = \mathcal{L}_{\theta_2}^{r_2} (\mathcal{L}_{\theta_1+\alpha_1})^{r_1} \mathcal{L}_{\alpha_1}^{r_1} S_M =$$

$$= \mathcal{L}_{\theta_2}^{r_2} (\mathcal{L}_{\theta_1+\alpha_1})^{r_1} \mathcal{L}_{\alpha_1}^{r_1} \mathcal{L}_{\alpha_2}^{2r_2} S_M = \dots = (\mathcal{L}_{\theta_2+\alpha_2})^{r_2} (\mathcal{L}_{\theta_1+\alpha_1})^{r_1} \mathcal{L}_{\alpha_1}^{r_1} \mathcal{L}_{\alpha_2}^{r_2} S_M \tag{45}$$

$$= (\mathcal{L}_{\theta_1+\alpha_1})^{r_1} (\mathcal{L}_{\theta_2+\alpha_2})^{r_2} \mathcal{L}_{\alpha_1}^{r_1} \mathcal{L}_{\alpha_2}^{r_2} S_M = \dots = \mathcal{L}_{\theta_1}^{r_1} \mathcal{L}_{\theta_2}^{r_2} S_M .$$

qui démontre la commutativité du produit d'opérateurs de prolongement analytique.

Il résulte de tout ce qui précède l'énoncé du théorème I.1

°

° °

A P P E N D I C E C

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

DEMONSTRATION DU THEOREME DE DECOMPOSITION DE S (UNITARITE PHYSIQUE)

-:-

La démonstration du théorème I.2 peut être faite par récurrence, avec une utilisation complète des propriétés contenues dans le théorème des chemins. Les relations (18) du chapitre I sont donc fondamentales.

I - Cas de 1 et 2 voies.

1°/ - Le résultat est trivial pour le cas d'une voie. Définissons :

$$\sigma_o^{(1)} = \frac{1}{2}(S_{11} + \mathcal{L}_1 S_{11}) \; ; \quad \sigma_1^{(1)} = \frac{1}{2f_1}(S_{11} - \mathcal{L}_1 S_{11}) \qquad (1)$$

où f_1 change de signe sous $\mathcal{L}_1$.

Les deux fonctions (1) vérifient :

$$\sigma_j^{(1)} = \mathcal{L}_1 \sigma_j^{(1)} \quad , \quad j = 0,1 \qquad (2)$$

et

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\mu S_{11} = \sigma_o^{(1)} + (-)^{\text{Card}\,(M \cap \{1\})} f_1 \quad , \\ M = \{\emptyset\} \, , \{1\} \end{cases} \qquad (3)$$

2°/ - Le cas de deux voies ; la fonction S_{11}.

Considérons les 4 fonctions :

$$\begin{cases} \sigma_o^{(1)} = \frac{1}{4}(S_{11} + \mathcal{L}_1 S_{11} + \mathcal{L}_2 S_{11} + \mathcal{L}_3 S_{11}) \\ \sigma_1^{(1)} = \frac{1}{4f_1}(S_{11} - \mathcal{L}_1 S_{11} + \mathcal{L}_2 S_{11} - \mathcal{L}_3 S_{11}) \\ \sigma_2^{(1)} = \frac{1}{4f_2}(S_{11} + \mathcal{L}_1 S_{11} - \mathcal{L}_2 S_{11} - \mathcal{L}_3 S_{11}) \\ \sigma_3^{(1)} = \frac{1}{4f_1 f_2}(S_{11} - \mathcal{L}_1 S_{11} - \mathcal{L}_2 S_{11} + \mathcal{L}_3 S_{11}) \end{cases} \qquad (4)$$

où :

$$\mathcal{L}_j f_i = \begin{cases} -f_i & \text{si } i = j \\ f_i & \text{si } i \neq j \end{cases} \qquad (4')$$

Il suit du théorème des chemins que :

$$\mathcal{L}_\rho \sigma^{(1)}_\mu = \sigma^{(1)}_\mu \qquad \forall R \in \mathcal{P}(\{1,2\}) \ , \qquad (5)$$

est vérifié compte tenu de (4').

L'inversion des relations (4) donne :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\rho S_{11} = \sigma^{(1)}_o + (-)^{\text{Card}(R \cap \{1\})} f_1 \sigma^{(1)}_1 + (-)^{\text{Card}(R \cap \{2\})} f_2 \sigma^{(1)}_2 \\ \qquad\qquad + (-)^{\text{Card}(R \cap \{1,2\})} f_1 f_2 \sigma^{(1)}_3 \\ \forall R \in \mathcal{P}(\{1,2\}) \end{cases} \qquad (5')$$

3°/ - Cas de deux voies, la matrice S.

Du théorème des chemins pour :

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} \end{pmatrix} \ ,$$

il suit que les deux matrices :

$$\begin{cases} \sigma^{(1,2)}_0 = \frac{1}{2}(S + \mathcal{L}_3 S) \\ \sigma^{(1,2)}_3 = \frac{1}{2f_1 f_2}(S - \mathcal{L}_3 S) \end{cases} \qquad (6)$$

vérifient :

$$\mathcal{L}_3 \sigma^{(1,2)} = \sigma^{(1,2)} \ , \ \rho = 0 \text{ ou } 3.$$

L'inversion des relations (6) est triviale.

II - HYPOTHESES DE LA RECURRENCE ; LE CAS DE n VOIES.

Soit l'ensemble des n voies :

$$N = \{ 2^0 , 2^1, \ldots, 2^{n-1} \}$$

Soit L un ensemble quelconque :

$$L \in \mathcal{P}(N)$$

et M le plus petit physique qui lui soit associé par :

$$\forall L \in \mathcal{P}(N) \ , \exists M \in \mathcal{P}_p(N) : L \in \mathcal{P}(M) \text{ et } \forall \alpha \in M \ , \ M - \{\alpha\} \notin \mathcal{P}_p(N) \text{ ou } L \notin \mathcal{P}_p(M - \{\alpha\}) \tag{7}$$

On a :

1 - Formule de décomposition :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\rho S_L = \sum_{T \in \mathcal{P}(N-M)} \left[\sigma^{(L)}_{\tau} + g_M \ \sigma^{(L)}_{\tau+\mu} \ (-)^{\delta^M_{R \cap M}} \right] \ f_T \ (-)^{\text{Card}\,(R \cap T)} \\ \\ R = Q \quad \text{ou} \quad R = Q + M \quad , \quad \forall \ Q \in \mathcal{P}(N-M) \quad , \end{cases} \tag{8}$$

où

$$f_T = \prod_{i \in T} f_i \quad , \ g_M = \sum_{i \in M} f_i \quad , \forall \ T \in \mathcal{P}(N-M)$$

et

$$\mathcal{L}_j \mathcal{L}_k f_i = \mathcal{L}_k \mathcal{L}_j f_i \ ; \ \mathcal{L}_j f_i = \begin{cases} - f_i & \text{si } i = j \\ \\ f_i & \text{si } i \neq j \end{cases} ;$$

$\delta^M_{R \cap M}$ est le symbole de Kronecker étendu aux ensembles.

2 - Formules de symétrie :

R étant défini dans (8), on a :

$$\sigma^{(L)}_{\pi} = \mathcal{L}_\rho \sigma^{(L)}_{\pi} \ , \tag{9}$$

avec R et P = T ou T + M , $\forall$ T $\in \mathcal{P}(N-M)$.

3 - Formules d'inversion :

Elles se déduisent de (8) et (9) par un procédé d'inversion classique que nous allons voir. Réciproquement, la donnée de ces relations et la propriété (9) conduisent aux relations (8). Pour démontrer les relations d'inversion il faut distinguer deux cas de valeurs pour R dans (8).

Cas $R \in \mathfrak{I}(N-M)$.

La relation (8) conduit à :

$$\sum_{R \in \mathfrak{I}(N-M)} (-)^{\mathrm{Card}\,(R \cap T_1)} \zeta_\rho S_L = \sum_{\substack{R,T \\ \in \mathfrak{I}(N-M)}} \left[\sigma^{(L)}_{\tau} + g_M \, \sigma^{(L)}_{\tau+\mu} (-)^{\delta^M_{M \cap R}} \right] \times$$

$$\times f_T \, (-)^{\mathrm{Card}\,(R \cap T_1) + \mathrm{Card}(R \wedge T)} \quad , \tag{10}$$

$$\forall\, T_1 \in \mathfrak{I}\ (N-M) \quad .$$

Comme, à un nombre pair près :

$$\mathrm{Card}\,(R \cap T) + \mathrm{Card}\,(R \cap T_1) = \mathrm{Card}\left[R \cap (T_1 \div T) \right] ,$$

et que :

$$\sum_{R \in \mathfrak{I}(N-M)} (-)^{\mathrm{Card}\left[R \cap (T_1 \div T)\right]} = 2^{n-m} \, \delta^T_{T_1} \quad ,$$

la relation (10) s'écrit :

$$\begin{cases} 2^{n-m} \, f_T \left(\sigma^{(L)} + g_M \, \sigma^{(L)}_{\tau+\mu} \right) = \sum_{R \in \mathfrak{I}(N-M)} (-)^{\mathrm{Card}\,(R \cap T)} \zeta_\rho S_L \\ \forall\, T \in \mathfrak{I}\ (N-M) \end{cases} \tag{11}$$

puisque :

$$\delta^M_{R \cap M} = 0 \quad .$$

Cas $R = M + Q$, $Q \in \mathfrak{I}\ (N-M)$.

Compte tenu qu'à présent :

$$\delta^M_{R \cap M} = 1 \quad ,$$

le même procédé que le passage de (10) à (11) donne :

$$\begin{cases} 2^{n-m} \, f_T \left(\sigma^{(L)}_{\tau} - g_M \, \sigma^{(L)}_{\tau+\mu} \right) = \sum_{\substack{Q \in \mathfrak{I}(N-M) \\ R = Q+M}} (-)^{\mathrm{Card}\,(R \cap T)} \zeta_\rho S_L \\ \forall\, T \in \mathfrak{I}\ (N-M). \end{cases} \tag{12}$$

La combinaison de (11) et (12) donne les relations d'inversion :

$$\begin{cases} 2^{n-m+1}\, f_T\, \sigma^{(L)}_{\tau} = \sum_{R \in \mathfrak{P}(N-M)} (-)^{\mathrm{Card}\,(R \cap T)} \left(\lambda_\rho S_L + \lambda_\rho \lambda_\tau S_L \right) \\ 2^{n-m+1}\, f_T\, g_M\, \sigma^{(L)}_{\tau+\mu} = \sum_{R \in \mathfrak{P}(N-M)} (-)^{\mathrm{Card}\,(R \cap T)} \left(\lambda_\rho S_L - \lambda_\rho \lambda_\tau S_L \right) \qquad (13) \\ \forall\ T \in \mathfrak{P}(N-M) \end{cases}$$

M étant défini par (7).

Il nous suffit donc de démontrer la généralisation de (8) et (9) pour n+1 voies.

III - DEMONSTRATION DE LA RECURRENCE.

Nous allons appeler l'ensemble des n+1 voies :

$$N' = N + \left\{ 2^n \right\} \quad ,$$

N étant l'ensemble des n premières voies défini au § précédent. Nous allons conserver pour L, M, R, T le sens (en tant que parties de N) que nous leur avons donné dans l'énoncé des hypothèses de la récurrence :

$L \in \mathfrak{P}(N)$; Ω, T, $R \in \mathfrak{P}(N-M)$; $M \in \mathfrak{P}_P(N)$, P = Q ou Q + M .

Pour la matrice S_L et les chemins λ_ρ (associés aux parties de N) les propriétés constituant les hypothèses de la récurrence restent, bien sûr, vraies.

L'extension doit donc se faire en deux temps :

. Pour $L \in \mathfrak{P}(N)$ et $\lambda_{\rho'}$ ($R' = R \cup \left\{ 2^n \right\}$)

. Pour L = N'.

III.1 - $L \in \mathfrak{P}(N)$ et $R' = R \cup \left\{ 2^n \right\}$, $R \in \mathfrak{P}(N)$.

Nous avons :

$$\lambda_\rho S_L = \sum_{T \in \mathfrak{P}(N-M)} \left(\sigma^{(L)}_{\tau} + g_M\, \sigma^{(L)}_{\tau+\mu}\, (-)^{\delta^M_{R \cap M}} \right) f_T\, (-)^{\mathrm{Card}\,(R \cap T)} \qquad (8)$$

et

$$\lambda_\rho\, \sigma^{(L)}_{\pi} = \sigma^{(L)}_{\pi} \qquad (9)$$

La commutativité des chemins associés à N-M et les relations d'inversion (13) nous assurent que cette commutativité est conservée pour les matrices $\sigma^{(L)}_{\pi}$.

Le chemin $\mathcal{L}_{\rho'}$ étant par convention :

$$\mathcal{L}_{\rho'} = \mathcal{L}_{2^n}\mathcal{L}_{\rho} \quad ,$$

définissons la fonction f_{2^n} par :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_i\mathcal{L}_j f_{2^n} = \mathcal{L}_j\mathcal{L}_i f_{2^n}, \quad \forall\ i,j \in N', \\ \mathcal{L}_i f_{2^n} = \begin{cases} -f_{2^n} & \text{si} \quad i = 2^n \\ f_{2^n} & \text{si} \quad i \neq 2^n \end{cases} \end{cases} \tag{11}$$

A cause de (9), nous avons :

$$\mathcal{L}_{2^n}\sigma^{(L)}_{\pi} = \mathcal{L}_{\rho'}\sigma^{(L)}_{\pi} \quad .$$

Le théorème des chemins donne, compte tenu de (13) :

$$\sigma^{(L)}_{\pi} = \mathcal{L}^2_{2^n}\sigma^{(L)}_{\pi} \quad . \tag{15}$$

Les fonctions :

$$\begin{cases} \alpha^{(L)}_{\pi} = \frac{1}{2}\left(\sigma^{(L)}_{\pi} + \mathcal{L}_{2^n}\sigma^{(L)}_{\pi}\right) \\ \alpha^{(L)}_{\pi+2^n} = \frac{1}{2\ f_{2^n}}\left(\sigma^{(L)}_{\pi} - \mathcal{L}_{2^n}\sigma^{(L)}_{\pi}\right) \end{cases} \tag{16}$$

vérifient :

$$\alpha^{(L)}_{\pi} = \mathcal{L}_{2^n}\alpha^{(L)}_{\pi} \quad \text{et} \quad \alpha^{(L)}_{\pi+2^n} = \mathcal{L}_{2^n}\alpha^{(L)}_{\pi+2^n} \quad , \tag{17}$$

ainsi que

$$\alpha^{(L)}_{\pi} = \mathcal{L}_{\rho}\alpha^{(L)}_{\pi} \quad \text{et} \quad \alpha^{(L)}_{\pi+2^n} = \mathcal{L}_{\rho}\alpha^{(L)}_{\pi+2^n} \quad . \tag{17'}$$

Dans ces conditions, la relation (8) s'écrit aussi :

$$\mathcal{L}_\beta S_L = \sum_{T \in \mathfrak{I}(N'-M)} \left(\alpha_\tau^{(L)} + g_M \quad \alpha_{\tau+\mu}^{(L)} (-)^{\delta_{M\cap R}^{M}} \right) \cdot \quad f_T \, (-)^{\mathrm{Card}\,(B \cap T)} \tag{18}$$

$\forall\, B \in \mathfrak{I}(N'-M)$.

Les relations (17), (17') et (18) sont les formules de décomposition et de symétrie du cas à n + 1 voies, les formules d'inversion correspondantes s'en déduisent.

III.2 - Cas L = N'.

D'après le théorème I-1 (Ch. I) les matrices :

$$\sigma_o^{(N')} = \frac{1}{2} \left(S_{N'} + \mathcal{L}_{\nu'} S_{N'} \right)$$

$$\sigma^{(N')} = \frac{1}{2 g_{N'}} \left(S_{N'} - \mathcal{L}_{\nu'} S_{N'} \right)$$

avec

$$g_{N'} = \sum_{i=1}^{2^n} f_i \quad ,$$

sont des matrices fonctions vérifiant :

$$\sigma_\alpha^{(N')} = \mathcal{L}_{\nu'} \sigma_\alpha^{(N')} \qquad (\alpha = 0 \text{ ou } \nu')$$

La récurrence est donc démontrée entièrement.

———

A P P E N D I C E D

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

LES PROLONGEMENTS ANALYTIQUES DE S ; CAS DE L'UNITARITE ETENDUE

-:-

I - RAPPELS.

1°/ - Nous avons exprimée l'hypothèse d'unitarité étendue par les relations :

$$S_L \cdot \mathcal{L}_\lambda S_L = 1 \quad , \forall L \in \mathcal{B}(N) \, , \tag{1}$$

entre les sous-matrices de S et leurs prolongements analytiques le long d'un chemin fermé du plan de s. $\mathcal{L}_\lambda$ dans (1) est, (voir ch. 0), l'opérateur de prolongement analytique le long d'un chemin fermé du plan complexe qui n'enserre, et qu'une fois, les seuils de L.

2°/ - Nous avons défini les opérateurs $\mathcal{L}_\chi$ comme la classe de tous les opérateurs de prolongement analytiques tels que $\mathcal{L}_\chi S_L$ vérifie la propriété Ψ suivante :

$\Psi \equiv \{ (\mathcal{L}_\chi S_L)^{\pm 1}$ est méromorphe dans G_o et continue sur $\mathbb{R}_+$, que la limite soit prise à partir de $Im(\Delta)>0$ ou $Im(\Delta)<0 \}$.

Il suit de là que les fonctions $\mathcal{L}_\chi S_L$ n'ont de zéros ou pôles qu'isolés dans G_o et, à la limite, des deux côtés de la région physique.

3°/ - Pour les fonctions $\mathcal{L}_\chi S_L$ qui vérifient cette propriété Ψ , nous avons postulé l'unitarité étendue non physique (UENP) et exprimée par :

$$\mathcal{L}_\chi S_L \cdot \mathcal{L}_\lambda \mathcal{L}_\chi S_L = 1 \tag{2}$$

Ceci n'est qu'une généralisation de la relation (1) aux déterminations non physiques de S_L qui nous conduit à :

$$\mathcal{L}_\lambda \mathcal{L}_\chi S_L = (\mathcal{L}_\chi S_L)^{-1} \, .$$

II - PREMIERES CONSEQUENCES DES HYPOTHESES.

1°/ - Si on prolonge la relation (1) par $\mathcal{L}_\chi$, comme $\mathcal{L}_\chi S_L$ vérifie Ψ et la relation (2) on obtient :

$$\mathcal{L}_\chi S_L \cdot \mathcal{L}_\chi \mathcal{L}_\lambda S_L = 1 \, , \tag{3}$$

et

$$\alpha_x \alpha_\lambda S_L = \alpha_\lambda \alpha_x S_L = (\alpha_x S_L)^{-1} = \alpha_x S_L^{-1} . \tag{4}$$

La relation (4) est une propriété de commutativité et montre que si $\alpha_x S_L$ vérifie Ψ , il en est de même de $\alpha_x \alpha_\lambda S_L$.

En prolongeant une fois la relation (2) par α_λ , compte tenu de (4), on tire :

$$\alpha_\lambda \alpha_x \alpha_\lambda S_L = \alpha_\lambda^2 \alpha_x S_L = \alpha_x \alpha_\lambda^2 S_L = \alpha_x S_L .$$

On peut encore itérer cette relation pour trouver :

$$\alpha_\lambda^{p_1} \alpha_x \alpha_\lambda^{p_2} S_L = \alpha_\lambda^{p_1+p_2} \alpha_x S_L = \alpha_x \alpha_\lambda^{p_1+p_2} S_L , \tag{5}$$

où p_1 et p_2 sont des entiers relatifs quelconques.

Ainsi, l'existence de $\alpha_x S_L$ nous assure celle d'une infinité de prolongements analytiques de S_L qui se subdivisent en deux classes d'équivalence suivant la parité de p_1+p_2, puisque :

$$\begin{cases} \alpha_x \alpha_\lambda^{2q+1} S_L = \alpha_x \alpha_\lambda S_L = (\alpha_x S_L)^{-1} \\ \alpha_x \alpha_\lambda^{2q} S_L = \alpha_x S_L \end{cases} \tag{5'}$$

2°/ - Avant de continuer, il convient de remarquer que les propriétés analytiques des matrices :

$$R_p = \left(\ldots \left(S^{-1}_{A_p} \right)^{-1}_{A_{p-1}} \ldots \right)^{-1}_{A_1} \tag{6.1}$$

que nous avons établies en appendice A ne dépendent pas de ce que les ensembles A_j soient ou non des parties physiques de N. La seule chose qui soit essentielle est la relation d'inclusion :

$$A_p \supseteq A_{p-1} \supseteq \ldots \supseteq A_1 \tag{6.2}$$

Nous pouvons donc utiliser les résultats de l'appendice A, ici comme nous l'avons fait en appendice B.

III - PROLONGEMENT ANALYTIQUE DES ELEMENTS DIAGONAUX DE S.

III.1 - Conséquences de l'unitarité physique.

1°/ Soit M un ensemble physique de seuils ; soit aussi la suite de parties physiques de N :

$$A_p \supsetneq A_{p-1} \cdots \supsetneq A_1 \supsetneq M \,. \tag{7.1}$$

Nous avons démontré en appendice B que :

$$\alpha_{\alpha_p} \cdots \alpha_{\alpha_1} S_M = \left[\left(\ldots \left(S^{-1}_{A_p} \right)^{-1}_{A_{p-1}} \ldots \right)^{-1}_{A_1} \right]_M \tag{7.2}$$

donc :

$$\forall L \in \mathcal{B}(M) \quad : \alpha_{\alpha_p} \cdots \alpha_{\alpha_1} S_L = \left[\left(\ldots \left(S^{-1}_{A_p} \right)^{-1}_{A_{p-1}} \ldots \right)^{-1}_{A_1} \right]_L \,, \tag{7.3}$$

puisque :

$$\alpha_\rho S_L \equiv (\alpha_\rho S_M)_L \,.$$

La relation (7.3), vraie pour toute partie de M, l'est a fortiori pour tout S_{ii} $(\forall i \in M)$. Pour $L = \{i\}$, elle définit donc 2^{n-m+1} prolongements analytiques de S_{ii} qui sont des fonctions méromorphes vérifiant Ψ.

2°/ - Dans tout ce paragraphe nous allons nous préoccuper d'un élément diagonal quelconque, mais fixé : S_{ii}. Nous appellerons A_1 le plus petit ensemble physique de seuils qui contienne i. Tous les résultats obtenus en appendice B, dans le cadre de l'unitarité physique, pour S_{A_1} -donc S_{ii}- restent vrais ici ; c'est notamment le cas de la commutativité des opérateurs associés à A_1 et aux parties de $N-A_1$.

III.2 - Premières conséquences de l'unitarité étendue.

De la relation (1) on tire :

$$\alpha^2_\lambda S_{ii} = S_{ii} \quad , \forall L \in \mathcal{B}(N) \quad , \; L \cap \{i\} = \{i\} \,. \tag{8}$$

Comme la fonction

$$\lambda_\lambda S_{ii} = (S_L^{-1})_{ii} ,$$

vérifie la propriété Ψ , on peut lui appliquer la formule d'unitarité étendue non physique ($\equiv$ UENP), et alors :

$$\begin{cases} \lambda_i \lambda_\lambda S_{ii} = \lambda_\lambda \lambda_i S_{ii} \\ \lambda_i^{p_1} \lambda_\lambda \lambda_i^{p_2} S_{ii} = \lambda_\lambda \lambda_i^{p_1+p_2} S_{ii} = \lambda_i^{p_1+p_2} \lambda_\lambda S_{ii} \\ \forall L \in \mathcal{B}(N) , \quad L \cap \{i\} = \lambda_{i\}} . \end{cases} \tag{9}$$

Considérons plus particulièrement des ensembles L de la forme :

$$L = \{i\} \cup R , \tag{10.1}$$

où R est défini par :

$$\forall j \in R \quad , \quad j < i . \tag{10.2}$$

Selon les définitions du chapitre 0, on a l'identité :

$$\lambda_\lambda \equiv \lambda_i \lambda_\rho .$$

En introduisant cela dans (8) et (9) on tire :

$$\begin{cases} \lambda_i^2 S_{ii} = \lambda_\rho^2 S_{ii} = S_{ii} \\ \lambda_i \lambda_\rho S_{ii} = \lambda_\rho \lambda_i S_{ii} = (\lambda_\rho S_{ii})^{-1} \\ \lambda_i^{p_1} \lambda_\rho \lambda_i^{p_2} S_{ii} = \lambda_i^{p_1+p_2} \lambda_\rho S_{ii} = \lambda_\rho \lambda_i^{p_1+p_2} S_{ii} , \end{cases} \tag{10.3}$$

pour tout R vérifiant (10.1) et (10.2) .

III.3 - Expression de certains prolongements analytiques de S_{ii}

1°/ - Nous avons dit que l'ensemble physique A_1 vérifie :

$$i \in A_1 \quad , \quad A_1 \in \mathcal{B}_p(N) \quad , \quad A_1 - \{i\} \in \mathcal{F}_p(N) ; \tag{11}$$

on adjoint à A_1 une suite de parties physiques de N qui le contienne :

$$A_p \supset A_{p-1} \ldots \supset A_1 \qquad p \geq 1 \tag{12.1}$$

et une autre suite finie de sous-ensembles physiques B_j :

$$A_1 \supset B_1 \supset B_2 \supset \ldots \supset B_q \qquad q \geq 1 \ . \tag{12.2}$$

On définit enfin les sous-ensembles de N :

$$C_j = \{i\} \cup B_j \qquad \forall j = 1, \ldots, q \ . \tag{12.3}$$

ils vérifient, trivialement :

$$A_1 \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \ldots \supset C_q \ . \tag{12.4}$$

Les équations (7) et les résultats de l'appendice B nous fournissent déjà :

$$\lambda_{\alpha_p} \ldots \lambda_{\alpha_1} S_{A_1} = \left(\ldots \left(S_{A_p}^{-1} \right)^{-1}_{A_{p-1}} \ldots \right)^{-1}_{A_1} \tag{13}$$

La sous-matrice :

$$\lambda_{\alpha_p} \ldots \lambda_{\alpha_1} S_{C_1} \equiv \left[\lambda_{\alpha_p} \ldots \lambda_{\alpha_1} S_{A_1} \right]_{C_1} \tag{14}$$

de la matrice fonction (13) vérifie la propriété Ψ . On peut donc lui appliquer UENP pour obtenir :

$$\lambda_{\gamma_1} \lambda_{\alpha_p} \ldots \lambda_{\alpha_1} S_{C_1} = \lambda_{\alpha_p} \ldots \lambda_{\alpha_1} \lambda_{\gamma_1} S_{C_1} = \left[\lambda_{\alpha_p} \ldots \lambda_{\alpha_1} S_{C_1} \right]^{-1} . \tag{15}$$

Cette matrice est aussi du type (6.1). Comme :

$$\lambda_{\alpha_p} \ldots \lambda_{\alpha_1} \lambda_{\gamma_1} S_{C_2} = \left[\lambda_{\alpha_p} \ldots \lambda_{\alpha_1} \lambda_{\gamma_1} S_{C_1} \right]_{C_2}$$

vérifie Ψ , on peut utiliser UENP et tirer :

$$\ldots \ldots \ldots \

La récurrence est alors simple à écrire ; elle conduit à :

$$\mathcal{L}_{\alpha_p} \dots \mathcal{L}_{\alpha_1} \mathcal{L}_{\gamma_1} \dots \mathcal{L}_{\gamma_q} S_{C_q} = \Big(\dots \big(\big(\dots (S_{A_p}^{-1})_{A_{p-1}}^{-1} \dots \big)_{A_1}^{-1} \big)_{C_1}^{-1} \dots \Big)_{C_q}^{-1} \qquad (17)$$

qui définit le prolongement (le long du chemin précisé par la suite d'opérateurs dans (17)) de S_{C_q} (donc S_{ii}) ; la fonction dans la relation (17) vérifie la propriété Ψ.

2°/ - Comme les relations d'inclusion (12) sont prises au sens large, la relation (17) définit également :

$$\mathcal{L}_{\alpha_p}^{a_p} \dots \mathcal{L}_{\alpha_1}^{a_1} \mathcal{L}_{\gamma_1}^{c_1} \dots \mathcal{L}_{\gamma_q}^{c_q} S_{C_q} \qquad (17')$$

prolongement de S_{C_q} par un produit <u>ordonné</u> de puissances d'opérateurs associés aux ensembles A_j et C_k .

Il apparaît sur la relation (17) que le prolongement par $\mathcal{L}_{\alpha_j}$ ou $\mathcal{L}_{\gamma_k}$ revient à l'inversion d'une matrice ; par suite, le prolongement par une puissance d'un tel opérateur se ramène soit à la matrice de départ, soit à son inverse. Les fonctions du type (17') sont donc en nombre fini, et ce nombre est celui des parties de N : 2^n. Ainsi, avec (17) on dispose de 2^n prolongements analytiques différents de S_{ii}, qui vérifient Ψ.

IV.4 - <u>Commutativité des opérateurs de prolongement</u>.

1°/ - La démonstration qui prouve la commutativité des opérateurs de prolongements analytiques du cas de l'unitarité physique (voir appendice B, § IV) peut être intégralement reprise ici. Elle conduit à montrer que les puissances des opérateurs $\mathcal{L}_{\alpha_j}$ et $\mathcal{L}_{\gamma_k}$ dans (17') commutent entièrement.

2°/ - De ceci et de la formule (17), il résulte qu'on peut écrire le prolongement de S_{ii} par une suite finie quelconque d'opérateurs associés aux parties physiques de N.

En effet, par définition des opérateurs de prolongement analytique on a :

$$\mathcal{L}_{\gamma_j} \equiv \mathcal{L}_i \mathcal{L}_{\beta_j} \qquad , \forall j = 1, \dots, q \ ,$$

(voir rel. (12)) ; on peut donc écrire l'élément (i,i) du premier membre de (17) :

$$\mathcal{L}_{\alpha_p} \ldots \mathcal{L}_{\alpha_1} \mathcal{L}_{\gamma_1} \ldots \mathcal{L}_{\gamma_q} S_{ii} = \mathcal{L}_{\alpha_p} \ldots \mathcal{L}_{\alpha_1} (\mathcal{L}_i \mathcal{L}_{\beta_1}) \ldots (\mathcal{L}_i \mathcal{L}_{\beta_q}) S_{ii} \qquad (18)$$

La commutativité des opérateurs $\mathcal{L}_{\alpha_j}$ et $\mathcal{L}_{\gamma_k}$, et le fait que (18) est une fonction qui vérifie Ψ, nous permet d'appliquer l'unitarité étendue non physique :

$$\mathcal{L}_x S_{ii} \cdot \mathcal{L}_i \mathcal{L}_x S_{ii} = 1 \quad , \qquad (19)$$

et de déduire par récurrence :

$$\mathcal{L}_{\alpha_p} \ldots \mathcal{L}_{\alpha_1} \mathcal{L}_{\beta_1} \ldots \mathcal{L}_{\beta_q} S_{ii} = \left[\mathcal{L}_{\alpha_p} \ldots \mathcal{L}_{\alpha_1} \mathcal{L}_{\gamma_1} \ldots \mathcal{L}_{\gamma_q} S_{ii} \right]^{\pm 1} ; \qquad (20)$$

la valeur du signe dans l'exposant sera + 1 ou - 1 suivant que q sera pair ou impair. La commutativité dans le second membre de (20) permet sans difficulté de conclure pour celle des opérateurs dans son premier membre ; la récurrence sur la relation (19) peut, en effet, être faite à partir de (18) en y commuttant certains des $\mathcal{L}_{\alpha_j}$ et $\mathcal{L}_{\gamma_k}$.

Comme les relations d'inclusions vérifiées par les ensembles A_j et B_k peuvent être prises au sens large, les expressions (20) et (17) définissent aussi les prolongements :

$$\mathcal{L}_{\alpha_p}^{a_p} \ldots \mathcal{L}_{\alpha_1}^{a_1} \mathcal{L}_{\beta_1}^{b_1} \ldots \mathcal{L}_{\beta_q}^{b_q} S_{ii} \quad . \qquad (21)$$

La commutativité dans (21) est assurée puisqu'elle l'est aussi dans (20).

3°/ - Considérons le prolongement :

$$\mathcal{L}_{j_1}^{r_1} \ldots \mathcal{L}_{j_p}^{r_p} S_{ii} \qquad (22)$$

de S_{ii}, où $j_1 \ldots j_p$ sont des éléments (non nécessairement différents ou ordonnés) de N. Définissons une suite d'ensembles physiques M_k $(k = 1, \ldots, p)$ qui vérifie

$$\forall M_k \in \mathcal{B}_p(N) \quad , \quad M_k \cup \{j_k\} \in \mathcal{B}_p(N).$$

On a la suite d'égalités :

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_{j_1}^{r_1} \dots \lambda_{j_p}^{r_p} S_{ii} = \lambda_{j_1}^{r_1} \dots \lambda_{j_p}^{r_p} \lambda_{\mu_p}^{2r_p} \dots \lambda_{\mu_1}^{2r_1} S_{ii} = \dots \\ \dots = \lambda_{j_1}^{r_1} \dots \lambda_{j_{p-1}}^{r_{p-1}} \lambda_{j_p+\mu_p}^{r_p} \lambda_{\mu_p}^{r_p} \lambda_{\mu_{p-1}}^{2r_{p-1}} \dots \lambda_{\mu_1}^{2r_1} S_{ii} = \dots \\ \dots = \lambda_{j_1+\mu_1}^{r_1} \dots \lambda_{j_p+\mu_p}^{r_p} \lambda_{\mu_p}^{r_p} \dots \lambda_{\mu_1}^{r_1} S_{ii} , \end{array}\right. \qquad (23)$$

qui montre la commutativité du produit dans (22) puisque les opérateurs associés aux parties physiques de N commuttent.

Cette commutativité et les relations (10) montrent alors que :

i) le prolongement de S_{ii} le long d'un chemin quelconque fermé coincide avec le prolongement de cette fonction par un opérateur λ_ρ associé à une partie de l'ensemble N .

ii) $\forall R, R' \in \mathcal{P}(N)$:
$$\begin{array}{l} \lambda_\rho \lambda_{\rho'} \lambda_\chi S_{ii} = \lambda_{\rho'} \lambda_\rho \lambda_\chi S_{ii} , \\ \lambda_\rho^2 \lambda_\chi S_{ii} = \lambda_\chi \lambda_\rho^2 S_{ii} = \lambda_\chi S_{ii} , \\ \lambda_\rho \lambda_{\rho'} \lambda_\chi S_{ii} = \lambda_{\rho' \div \rho} \lambda_\chi S_{ii} , \end{array} \qquad (24)$$

si $\lambda_\chi S_{ii}$ est un prolongement analytique de S_{ii}.

V - EXTENSION DU THEOREME A TOUT DETERMINANT DIAGONAL.

La formule démontrée en appendice E, donne pour le cas de l'unitarité étendue :

$$\Delta_L \lambda_\rho = \frac{\Delta_{R-L}}{\Delta_R} \qquad \forall L \in \mathcal{P}(R) \qquad (25)$$

donc :

$$\Delta_{\{i,j\}} = \frac{S_{ii}}{\lambda_{i+j} S_{jj}} \qquad (26)$$

qui est un cas particulier de (25) implique avec (24) la commutativité des opérateurs pour $\Delta_{\{i,j\}}$. Cette commutativité est également garantie pour $\Delta_{\{i,j,k\}}$ puisque :

$$\Delta_{\{i,j,k\}} = \frac{S_{ii}}{\lambda_{i+j+k} \Delta_{\{i,j\}}} ;$$

la récurrence est alors immédiate et conduit à l'extension des propriétés (24) à tout sous-déterminant diagonal de S. L'énoncé du théorème (I.5) s'en déduit.

o

o o

A P P E N D I C E E

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

UNE RELATION DETERMINANTALE

-:-

On peut toujours écrire une matrice régulière S de rang r :

$$r = \text{Card}\,(N) = n = \dim\,(S) \quad ,$$

sous la forme :

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & \tilde{C} \\ C & S_2 \end{pmatrix} \quad . \tag{1}$$

Supposons S_1 et S_2 également régulières de rang respectifs r_1 et r_2 :

$$r_1 = \ell = \text{Card}\,(L) \quad ; \quad r_2 = n - \ell = \text{Card}\,(N\text{-}L) \quad ,$$

les notations ensemblistes sont celles définies au § I du chapitre O.

Soit la matrice M :

$$M = S_1 - \tilde{C}\, S_2^{-1}\, C \quad , \tag{2}$$

de rang :

$$r_3 = \ell \quad ;$$

on a :

$$\text{Det}\, S = \text{Det}\, S_2\ \text{Det}\, M \quad , \tag{3}$$

puisque

$$\begin{pmatrix} S_1 & \tilde{C} \\ C & S_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -S_2^{-1}C & S_2^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 - \tilde{C}\, S_2^{-1}\, C & \tilde{C}\, S_2^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ,$$

L, N-L, N étant des ensembles d'indices, liés de façon évidente à S_1, S_2 et S.

Le mineur algébrique associé à l'élément $S_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta \in L$) est :

$$\Delta_{\alpha\beta}(S) = (-)^{\alpha-\beta} \text{ Det}_{\alpha\beta}(S) = (-)^{\alpha-\beta} \text{ Det } S_2 \text{ Det}_{\alpha\beta} M \quad . \qquad (4)$$

Or, si M est une matrice régulière :

$$(-)^{\alpha-\beta} \text{ Det}_{\alpha\beta}(M) = (\text{Det } M) \cdot M^{-1}_{\alpha\beta} \quad , \qquad (5)$$

d'où l'on déduit :

$$\text{Det}\left[(-)^{\alpha-\beta} \text{ Det}_{\alpha\beta}(M)\right] = (\text{Det } M)^{\text{Card}L} (\text{Det } M)^{-1} = (\text{Det } M)^{\text{Card}L-1} \quad . \qquad (6)$$

Mais (4) donne aussi :

$$\text{Det}\left[\Delta_{\alpha\beta}(S)\right] = (\text{Det } S_2)^{\text{Card } L} \text{ Det}\left[(-)^{\alpha-\beta} \text{ Det}_{\alpha\beta} M\right] \quad . \qquad (7)$$

En portant (3) et (6) dans (7) :

$$\text{Det}\left[\Delta_{\alpha\beta}(S)\right] = \text{Det } S_2 \, (\text{Det } S)^{\text{Card}L-1} \quad . \qquad (8)$$

Or :

$$S^{-1}_{\alpha\beta} = \frac{\Delta_{\alpha\beta}(S)}{\text{Det } S} \qquad (9)$$

La relation (9) dans (8) donne :

$$\det (S^{-1})_1 = \frac{\text{Det } S_2}{\text{Det } S} \qquad (10)$$

Si la matrice S est unitaire, avec les notations du début du chapitre O, on déduit de (10) :

$$\mathcal{L}_\nu \Delta_L = \frac{\Delta_{N-L}}{\Delta_N} \quad , \forall \; L \in \mathcal{P}(N) \qquad (11)$$

et plus précisément dans le cas de l'unitarité physique :

$$\Delta_M = \frac{\Delta_L}{\mathcal{L}_\mu \Delta_{M-L}} = \frac{\Delta_{M-L}}{\mathcal{L}_\mu \Delta_L} \quad , \forall M \in \mathcal{P}_p(N) \quad , \forall \; L \in \mathcal{P}(M) \qquad (12)$$

A P P E N D I C E F

-:-:-:-:-:-:-:-:-

RELATIONS DETERMINANTALES DU FORMALISME D/D

-:-

1°/ - La définition de la matrice K' :

$$S = (1 + i K')\,(1 - iK')^{-1} \qquad (1)$$

avec :

$$K' = k^{1/2}\, K\, k^{1/2} \quad ,$$

conduit à :

$$\Delta_L(K') = \Delta_L(k)\quad \Delta_L(K) = k_L\ \Delta_L(K) \quad , \qquad (2)$$

puisque k est diagonale.

D'autre part, (1) donne :

$$-iK' = (1-S)\,(1+S)^{-1}$$

et, par suite :

$$(-i)^{\rho}\quad \Delta_L(K') = \quad \Delta_L\left[(1-S)(1+S)^{-1}\right] \qquad (4)$$

2°/Avec la formule de dérivation des déterminants, on peut montrer que l'on a le développement suivant :

$$\text{Det}\ (I + \lambda B) = \sum_{R \in \mathcal{R}(N)} \lambda^r \Delta_R(B) \qquad (5)$$

Si nous posons :

$$A = 1 \quad \text{et} \quad \lambda B = \pm S \qquad (6)$$

On tire aisément de (5) :

$$\Delta_N(1+S) = 1 + \text{tr}\ S + \sum_{2x2} \text{Det}_2\ S + \ldots + \text{Det}_N\ S \qquad (7)$$

$$\Delta_N(1-S) = 1 - \text{tr}\ S + \sum_{2x2} \text{Det}_2\ S + \ldots + (-)^n\ \text{Det}_N\ S \qquad (8)$$

Dans notre système de notations, ces relations s'écrivent aussi :

$$\Delta_N(1+S) = \sum_{L \in \mathcal{L}(N)} \Delta_L(S) \quad \text{et} \quad \Delta_N(1-S) = \sum_{L \in \mathcal{L}(N)} (-)^{\rho} \Delta_L(S)$$

(9)

3°/ - On peut aisément vérifier que :

$$\Delta_L\ (1 - S)\ (1+S)^{-1} = (-)^{\ell} \sum_{L' \in \mathfrak{Z}(L)} (-)^{\ell'}\ 2^{\ell'} \Delta_{L'}\left[(1+S)^{-1}\right] \qquad (10)$$

en utilisant (5) et :

$$\Delta_L\left[(1 - S)(1+S)^{-1}\right] = (-)^{\ell}\ \Delta_L\left[1 - 2\ (1+S)^{-1}\right] . \qquad (11)$$

Or, dans l'appendice E précédent, nous avons vu que :

$$\Delta_L\ (R^{-1}) = \frac{\Delta_{N-L}\ (R)}{\Delta_N\ (R)} \qquad \forall\ L \in \mathfrak{Z}\ (N) \qquad (12)$$

pour toute matrice R de rang n.

En portant (12) dans (11) compte tenu de (2) et (1) il vient :

$$\Delta_L\ (K) = \frac{(-i)^{\ell}}{\Delta_L(k)\ \Delta_N(1+S)} \sum_{\substack{L' \in \mathfrak{Z}\ (L) \\ M \in \mathfrak{Z}\ (N-L')}} 2^{\ell'}\ (-)^{\ell'}\ \Delta_M(S) \qquad (13)$$

La sommation sur L' donne alors:

$$\Delta_L(K) = \frac{(i)^{\ell}}{\Delta_L(k)\Delta_N(1+S)} \sum_{M \in \mathfrak{Z}(N)} (-)^{\mathrm{Card}\ (L \cap M)}\ \Delta_M(S) \qquad (14)$$

A P P E N D I C E G

-:-:-:-:-:-:-

DEMONSTRATION DES RELATIONS GENERALES D'UNITARITE PHYSIQUE

-:-

L'ensemble des notations qui vont s'introduire dans le cours de cette démonstration sont celles du § I dans le chapitre III ; nous ne l'expliciterons généralement pas.

Nous avons démontré que tout déterminant $\Delta_L(o)$ était décomposable en produit de déterminants physiques :

$$\begin{cases} \Delta_L(0) = \prod_{j \in J} \Delta_{M_j}(\alpha_j) \\ \alpha_1 \equiv 0 \quad , \quad \alpha_p = \sum_{q=1}^{p-1} (-)^{q+1} \mu_q \ . \end{cases} \tag{1}$$

La décomposition de L suivant ses sous-ensembles disjoints étant donnée :

$$L = \dot{+}_{i=1}^{r} L_i \ ,$$

on note les 2-sommes :

$$\lambda_i = \sigma(L_i) \tag{2}$$

et

$$\Lambda_{r-p} = \sum_{i=1}^{r-p} \lambda_i = \sigma\left(\dot{+}_{i=1}^{r-p} L_i\right) \ , \tag{3}$$

avec

$$\Lambda_{r-0} = \Lambda_r \equiv \lambda \qquad ; \quad 0 \leq p \leq r-1 \ . \tag{3'}$$

On supposera dans la suite, que L n'est pas une partie physique de N, autrement la solution est immédiate.

La définition (1) et la propriété des 2-sommes (rel. (11), ch. III) conduisent à :

$$\begin{cases} \alpha_{2p+2} = \mu_{2p+1} \div (\lambda - \Lambda_{r-p}) \\ \alpha_{2p+1} = \lambda - \Lambda_{r-p} \\ 0 \leq p \leq r-1 \end{cases} \ , \tag{4}$$

si $2^\circ \in L$, la relation (4) fournit le nombre α_{2r} qui n'interviendra pas dans les calculs qui suivent.

On peut écrire l'expression (1) sous la forme :

$$\Delta_L(0) = \prod_{p=0}^{r-1} \Delta_{M_{2p+1}}(\lambda - \Lambda_{r-p}) \prod_{p=0}^{r-1} \Delta_{M_{2p+2}}\left(\mu_{2p+2} \div (\lambda - \Lambda_{r-p})\right) . \qquad (5)$$

Remarquons que si $2^\circ \in L$, le second produit dans (5) peut être arrêté à r-2, autrement on ferait intervenir le déterminant associé au sous-ensemble vide de N (identique à 1, par convention).

En écrivant (20) sur le feuillet λ , on déduit :

$$F_L^{(0)}(0) = \Delta_L(0)\Delta_L(\lambda) = \prod_{p=0}^{r-1} \Delta_{M_{2p+1}}(\lambda - \Lambda_{r-p})\, \Delta_{M_{2p+1}}(\Lambda_{r-p}) * \prod_{p=0}^{r-1} \Delta_{M_{2p+2}}\left(\mu_{2p+1} \div (\lambda - \Lambda_{r-p})\right) \Delta_{M_{2p+2}}(\mu_{2p+1} \div \Lambda_{r-p}) \qquad (6)$$

On peut vérifier que les relations déterminantales d'unitarité physique :

$$\Delta_M(\theta)\, \Delta_n(\mu \div \theta) = 1 \quad \forall M \in \mathcal{P}_p(N) \ , \ T \in \mathcal{P}(N) , \qquad (7)$$

ne simplifient pas la relation (6). Le nombre de termes du produit $\Delta_L(0)\Delta_L(\lambda)$ est donc le double de celui du produit (5).

Par contre, on peut vérifier que, en utilisant (7), la fonction $F_L^{(1)}(0)$ ne contient plus le terme en $\Delta_{M_{2k+1}}$:

$$F_L^{(1)}(0) = F_L^{(0)}(0)\, F_L^{(0)}(\mu_{2k+1}) . \qquad (8)$$

De plus, $\Delta_{M_{2k+1}}$ est le seul terme à disparaître dans (8). En effet, si $\Delta_{M_{2q+1}}$ disparaissait de (8) par unitarité, cela signifierait ;

$$\Delta_{M_{2q+1}}(\Lambda_{r-p})\, \Delta_{M_{2q+1}}(\lambda - \Lambda_{r-p})\, \Delta_{M_{2q+1}}\left(\mu_{2k+1} \div \Lambda_{r-p}\right) \times \Delta_{M_{2q+1}}\left(\mu_{2k+1} \div (\lambda - \Lambda_{r-p})\right) = 1 \qquad (9)$$

qui n'est vérifié que si :

i) $\mu_{2k+1} = \mu_{2q+1} \Rightarrow k = q$

ii) $\mu_{2k+1} = \mu_{2q+1} \div \lambda$,

seule i) est vérifiable puisque ii) ne peut exister que pour :

$$\lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad L = \phi \ .$$

Il ne peut non plus pas y avoir de disparition dans (8) des déterminants indices pairs, autrement on aurait :

$$\exists q \in [0, \dots, r-1] ; \quad \Delta_{M_{2q+2}} \left(\Lambda_{r-p} \div \mu_{2q+1} \right) \Delta_{M_{2q+2}} \left((\lambda \div \Lambda_{r-p}) \div \mu_{2q+1} \right)$$

$$* \ \Delta_{M_{2q+2}} \left(\Lambda_{r-p} \div \mu_{2q+1} \div \mu_{2h+1} \right) \Delta_{M} \left((\lambda - \Lambda_{r-p}) \div \mu_{2q+1} \div \mu_{2h+1} \right) = 1 \ , \tag{10}$$

qui n'est réalisable que si :

$$\mu_{2q+2} \div \mu_{2q+1} \div \Lambda_{r-p} = \mu_{2q+1} \div \mu_{2h+1} \div \Lambda_{r-p} \ ,$$

c'est-à-dire si :

$$\left(\Lambda_{r-p} \div \mu_{2q+1} \right) \div \left(\mu_{2q+2} - \mu_{2h+1} \right) = 0 \ ,$$

ce qui n'est pas possible pour construction de $\mathcal{SAC}$.

De même, dans :

$$F_L^{(2)}(0) = F_L^{(1)}(0) * F_L^{(1)}(\mu_{2h+2}) \qquad 0 \leq h \leq r-1 \ ,$$

seul $\Delta_{M_{2h+2}}$ disparaît par unitarité.

Il en résulte que, si on définit la suite de fonctions :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_L^{(0)}(0) = \Delta_L(0) \, \Delta_L(\lambda) \\ F_L^{(1)}(0) = F_L^{(0)}(0) \, F_L^{(0)}(\mu_1) \\ \vdots \\ F_L^{(i)}(0) = F_L^{(i-1)}(0) \, F_L^{(i-1)}(\mu_i) \\ \vdots \\ F_L^{(2r)}(0) = F_L^{(2r-1)}(0) \, F_L^{(2r-1)}(\mu_{2r}) \end{array} \right. \tag{11}$$

nous aurons :

$$\begin{cases} F_L^{(2r)}(0) = 1 & \text{si } 2^\circ \notin L \\ F_L^{(2r-1)}(0) = 1 & \text{si } 2^\circ \in L \end{cases} \qquad (12)$$

où on tient compte de la remarque faite sur la relation (4). Les relations (12) sont les deux formes irréductibles des relations déterminantales d'unitarité physique. Par irréductible nous voulons dire que (12), définie par l'algorithme (11), est un produit tel que c'est le plus petit nombre possible de termes $\Delta_L(\rho)$ qui interviennent dans $F_L^{(2r)}$ ou $F_L^{(2r-1)}$ pour que (12) soit vérifié. En revenant aux définitions de $\mathcal{M}$ et des 2-sommes, on trouve que (12) contient l'ensemble des résultats énoncés dans le théorème III.1.

A P P E N D I C E H

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

FACTORISATION DE LA FONCTION D'INDETERMINATION

-:-

I - REMARQUES PRELIMINAIRES.

1°/ - Au chapitre IV (§ III) nous avons démontré une relation de conjugaison sur la région physique entre les différentes déterminations de la fonction D :

$$D_\mu = D^*_{\pi\div\mu} \quad , s \in I_\pi \quad , P \in \mathcal{P}_p(N) \quad , M \in \mathcal{B}(N) ; \qquad (1)$$

elle peut être décomposée en module et phase :

$$\begin{cases} |D_\mu| = |D_{\pi\div\mu}| \\ \hat{D}_\mu + \hat{D}_{\pi\div\mu} = 0 \end{cases} \qquad s \in I_\pi \quad . \qquad (2)$$

Comme ces relations sont vraies pour toute fonction D du formalisme D/D, elles sont vérifiées à la fois par D et $\mathcal{D}$. La fonction d :

$$d = \mathcal{D}/D \quad ,$$

vérifie donc ces mêmes propriétés :

$$d_\mu = d^*_{\pi\div\mu} \quad , s \in I_\pi \quad , M \in \mathcal{B}(N) \quad , P \in \mathcal{P}_p(N) \quad , \qquad (3)$$

que l'on peut écrire :

$$\begin{cases} |d_\mu| = |d_{\pi\div\mu}| \\ \hat{d}_\mu + \hat{d}_{\pi\div\mu} = 0 \end{cases} \qquad s \in I_\pi \quad . \qquad (4)$$

Comme a priori d est définie sur $\mathcal{R}_n$, on sait que les chemins commutent et sont de carré égal à un, pour cette fonction.

2°/ - On choisit i comme étant la voie mesurée expérimentalement. La seconde condition d'invariance (voir ch. V § IV) s'écrit :

$$|d_0| = |d_j| \qquad s \geq s_j \quad ;$$

Mais comme on peut écrire en même temps cette condition d'invariance pour tout

re élément S_{il}, ceci est vrai pour toute détermination d_l $(l \leq j)$, on a en fait :

$$|d_0| = |d_1| = |d_2| = \cdots = |d_j| \quad , s \geq s_j .$$

Tout ceci s'écrit de façon concise :

$$|d_0| = |d_l| \quad , s \geq s_j \quad , \forall l \leq j \tag{5}$$

3°/ - En utilisant le théorème fondamental de décomposition (voir ch. I, th. C) il est facile d'arriver à :

$$d_\mu = \sum_{L \in \mathcal{P}(N')} (-i)^l (-)^{\mathrm{Card}(L \cap M)} k_L A_\lambda \quad , M \in \mathcal{P}(N') , \tag{6}$$

avec :

$$N' = N - \{i\} .$$

L'expression (6) peut être, d'ailleurs étendue à tout $M \in \mathcal{P}(N)$ ainsi que la somme à tout $L \in \mathcal{P}(N)$, si on impose :

$$A_\lambda \equiv 0 \qquad \text{si} \qquad L \cap \{i\} \neq \phi .$$

Les fonctions A_λ dans (6) sont uniformes dans le plan de s, et l'analyticité réelle de d se traduit par celle des fonctions A_λ :

$$A_\lambda(s) = A^*_\lambda(s^*) \quad , \forall L \in \mathcal{P}(N) .$$

Pour des raisons déjà mentionnées au chapitre II, on peut toujours convenir de l'identité :

$$A_0 \equiv 1 .$$

Définissons :

$$d^{(j)}(k_j) = 1 - i k_j A_j \qquad \forall j \in N' .$$

On peut vérifier que si :

$$d_0 = \prod_{j \in N'} d^{(j)}(k_j) \quad , N' = N - \{i\} , \tag{7}$$

les fonctions A_λ dans (6) factorisent :

$$A_\lambda = \prod_{j \in L} A_j \qquad \forall L \in \mathfrak{F}(N) . \tag{8}$$

Réciproquement, la fonction d étant définie par (6), si les fonctions A_λ vérifient (8), alors d admet une décomposition du type (7).

4°/ - En ce qui concerne les ouverts I_μ de la région physique, nous adoptons la convention utilisée aux chapitres 0 et I. Il est évident que l'absence de la voie i dans N' ne gêne en rien (il suffirait de renuméroter les seuils de 2° à 2^{n-2}, par exemple). Ainsi on pose :

$$I_\mu =]\, \Lambda_{2m-1} , \Lambda_{2m}[\qquad ;$$

si 2^{m-1} est le dernier seuil de N' on a :

$$I_{\nu'} =]\, \Lambda_{2m-1} , \infty [$$

II - PROPRIETES DE d(s).

Pour établir la factorisation de d, il est utile de démontrer l'existence de nouvelles relations entre ses différentes déterminations. Pour cela nous allons démontrer par récurrence que :

$$\begin{cases} \cdot \quad d_0\, d_{j+\ell} = d_j\, d_\ell & , \forall \ell, j \in N \\ \cdot \quad \dfrac{d_\mu}{d_0} = \prod_{j \in M} \dfrac{d_j}{d_0} & \forall M \in \mathfrak{F}(N) \end{cases} \tag{9}$$

il est visible que la première relation (9) est un cas particulier de la seconde.

Nous allons supposer, pour simplifier l'écriture de la récurrence, que les seuils de N' sont les puissances successives de 2, partant de 0.

1°/ - Dans l'ouvert I_3 de la région physique, nous avons, conformément à (4) :

$$\begin{cases} |d_0| = |d_3| \quad , |d_1| = |d_2| \\ \hat{d}_0 + \hat{d}_3 = 0 \qquad \hat{d}_1 + \hat{d}_2 = 0 \end{cases} \tag{10.1}$$

qui résument les relations générales de conjugaison.

La relation (5), qui exprime l'indétermination expérimentale donne :

$$|d_0| = |d_1| = |d_2| \quad , \tag{10.2}$$

pour tout $s \geq s_2$, donc aussi sur I_3. N'oublions pas que :

$$\hat{f} + \hat{g} = \widehat{fg} \ ,$$

si f et g sont deux fonctions complexes. Des relations (10) on tire :

$$\begin{cases} |d_0| = |d_1| = |d_2| = |d_3| \\ \widehat{d_0 d_3} = \widehat{d_1 d_2} = 0 \end{cases} \quad , \lambda \in I_\pi \quad ,$$

d'où l'on déduit :

$$d_1 d_2 = d_0 d_3 \quad , \tag{11}$$

pour $\lambda \in I_\pi$. Comme (11) est une relation analytique, elle est vraie dans tout $\mathcal{R}_n$ dès qu'elle est vraie sur un ouvert de l'axe. La relation (11) est, en particulier, vraie sur la région physique entière.

2°/ - Dans l'ouvert suivant de la région physique I_7, on a :

$$|d_0| = |d_1| = |d_2| = |d_4| \tag{12.1}$$

par la propriété (5), alors que (4) donne :

$$\begin{cases} |d_0| = |d_7| \ , \ |d_1| = |d_6| \ , |d_2| = |d_5| \ , |d_3| = |d_4| \\ \widehat{d_0 d_7} = \widehat{d_1 d_6} = \widehat{d_2 d_5} = \widehat{d_3 d_4} = 0 \end{cases} \tag{12.2}$$

dans le même ouvert. De (12.1) et (12.2) on déduit l'égalité des modules des déterminations 0 à 7 de d sur I_7. On est alors conduit aux relations analytiques :

$$d_0 d_7 = d_1 d_6 = d_2 d_5 = d_3 d_4 \quad , \tag{13}$$

sur I_7, donc vraies sur toute la surface $\mathcal{R}_n$.

Nous disposons à présent des relations analytiques (11) et (13) sur $\mathcal{R}_n$, et celles-ci combinées donnent :

$$\frac{d_3}{d_7} = \frac{d_2}{d_6} = \frac{d_1}{d_5} \quad , \tag{14.1}$$

soit en particulier :

$$\begin{aligned} d_3\, d_6 &= d_2\, d_7 \\ d_3\, d_5 &= d_1\, d_7 \quad ; \end{aligned} \tag{14.2}$$

le long d'un chemin de classe $\mathcal{L}_7$ (voir chapitre 0), et en utilisant la règle des 2-sommes, les relations (14.2) se prolongent en :

$$\begin{cases} d_4\, d_1 = d_0\, d_5 \\ d_4\, d_2 = d_6\, d_0 \quad . \end{cases} \tag{15.1}$$

D'autre part, les relations (14.1) donnent :

$$d_7 = \frac{d_3\, d_6}{d_2} \quad ,$$

soit avec (11) et (15.1) :

$$d_7 = \frac{d_1 d_6}{d_0} = \frac{d_1\, d_2\, d_4}{(d_0)^2}$$

et par suite :

$$\frac{d_7}{d_0} = \frac{d_1\, d_2\, d_4}{(d_0)^3} \tag{15.2}$$

Les relations (11) et (15) sont les relations (9) dans le cas de trois voies.

3°/ - Supposons que les relations (9) soient vérifiées pour :

$$N' = \{ 2^0 \, , 2^1 \, , \ldots \, , 2^{n-1} \} \quad ;$$

cela revient à faire une récurrence des propriétés, soit sur le nombre de voies de N', soit sur le numéro d'ordre des ouverts de la région physique. Il faut à présent démontrer que les relations (9) sont vérifiées par l'ensemble N :

$$N = N' \cup \{ 2^n \} \quad .$$

Dans l'ouvert I_ν :

$$I_\nu = \;] \Delta_{2^n} \, , \infty [\quad ,$$

on a, d'une part,

$$|d_0| = |d_j| \qquad \forall j \in N \ , \tag{16.1}$$

et d'autre part :

$$\begin{cases} |d_\mu| = |d_{\nu-\mu}| & \forall M \in \mathfrak{P}(N) \\ \overbrace{d_\mu d_{\nu-\mu}} = 0 \ . \end{cases} \tag{16.2}$$

Des relations (16.2) on tire :

$$\begin{cases} |d_j| = |d_{\nu-j}| & j \in N \ , \ \nu \in I_\nu \ , \\ \overbrace{d_j d_{\nu-j}} = \overbrace{d_0 d_\nu} = 0 \end{cases}$$

soit, avec (16.1), la relation analytique :

$$d_0 d_\nu = d_j d_{\nu-j} \ , \tag{17.1}$$

qui est vraie sur $\mathcal{R}_n$ puisqu'elle l'est sur I_ν .

Or, on a(*) :

$$d_0 d_{\nu'} = d_j d_{\nu'-j} \qquad \forall j \in N' \ . \tag{17.2}$$

En divisant membre à membre (17.1) et (17.2) on obtient :

$$\frac{d_\nu}{d_{\nu'}} = \frac{d_{\nu-j}}{d_{\nu'-j}}$$

qui, transporté le long de $\mathcal{L}_\nu$, donne :

$$d_0 d_{j+2^n} = d_j d_{2^n} \qquad \forall j \in N' \ ; \tag{18}$$

ceci démontre la récurrence sur la première relation (9). Mais par hypothèse, nous avons :

$$\frac{d_\mu}{d_0} = \prod_{j \in M} \frac{d_j}{d_0} \qquad \forall M \in \mathfrak{P}(N') \tag{19}$$

(*) On a bien sûr :

$$\nu = \nu' + 2^n$$

qui est vraie sur tout feuillet de $\mathcal{R}_{n'}$, donc :

$$\frac{d_{\mu+2^n}}{d_{2^n}} = \prod_{j\in M} \frac{d_{j+2^n}}{d_{2^n}} \qquad \forall M \in \mathcal{P}(N'). \qquad (20)$$

En portant (9) et (18) dans (20), on trouve alors :

$$\frac{d_{\mu+2^n}}{d_0} = \prod_{j\in M\cup\{2^n\}} \frac{d_j}{d_0} \qquad \forall M \in \mathcal{P}(N') \qquad (21)$$

ce qui achève la récurrence. Les relations (9) sont donc intégralement démontrées.

III - FACTORISATION DE LA FONCTION d(s).

On a vu que, i étant la voie mesurée, on peut écrire :

$$\mathcal{S}_{ij} = \frac{\sqrt{d_i d_j}}{d_0} S_{ij} \qquad \forall j \in N', \qquad (22)$$

puisque :

$$d_i = d_0 ,$$

Mais, puisque :

$$d_0 d_{\ell+j} = d_\ell d_j \qquad , \forall \ell, j \in N',$$

la relation (22) est vraie pour tout couple ℓ et j de N'. Définissons la matrice diagonale $\tilde{S}$ par ses éléments :

$$\tilde{S}_{ij} = \left(\frac{d_i}{d_0}\right) \delta_{ij} \qquad i, j \in N$$

En raison des relations (9), $\tilde{S}$ vérifie l'unitarité étendue et le formalisme D/D, et on a :

$$\Delta_L(\tilde{S}) = \prod_{j\in L} \frac{d_j}{d_0} = \frac{d_\lambda}{d_0} \qquad L \in \mathcal{P}(N).$$

Comme on peut toujours écrire :

$$d_\lambda = \sum_{M\in\mathcal{P}(N)} (-)^{\mathrm{card}(L\cap M)} (-i)^m k_M A_\mu(s) ,$$

où les fonctions A_μ sont méromorphes, uniformes en s et analytiques réelles et que :

$$A_0 \equiv 1 \qquad , A_\mu = 0 \quad si \quad M \cap \{i\} \neq \phi ,$$

La transformée de Cayley R de S est une matrice dont les éléments de matrice sont :

$$\begin{cases} R_{ij} = (A_i A_j - A_0 A_{i+j})^{1/2} & i \neq j \quad , \; i,j \in N' \\ R_{ii} = A_i & i \in N' \end{cases} ,$$

au facteur multiplicatif $(k_i k_j)^{1/2}$ près. Comme $\tilde{S}$ est diagonale il s'en suit que R l'est, donc :

$$A_i A_j = A_{i+j} \qquad (A_0 \equiv 1) .$$

Mais comme on peut appliquer le formalisme D/D (avec la fonction d) à $\tilde{S}$, on peut appliquer le formalisme B/B (avec les fonctions A_μ) à la matrice R, donc :

$$\Delta_L(R) = A_\lambda = \prod_{i \in L} A_i \qquad , \; \forall L \in \mathfrak{I}(N') , \quad (23)$$

puisque R est diagonale. En se reportant au § II-3°/ ci-dessus, on voit qu'on démontre avec (23) la factorisation cherchée de d.

°

° °

A P P E N D I C E I

-:-:-:-:-:-:-:-

RENORMALISATION DE LA FONCTION D ET CONSERVATION DES LOIS DE DEGRE

-:-

Dans le cours du chapitre VII, nous avons déjà montré que la fonction D_1 correspond aux types suivants d'interactions nues(*) :

i) Interaction de contact seule (type F).

ii) Echange d'une seule particule (type Y).

iii) Superposition de ces deux interactions (F + Y),

est renormalisable. Cette renormalisation se traduit par la conservation de la forme analytique de D et des lois de degré dans l'opération. Cette démonstration couvre le contenu du paragraphe IV du chapitre VII (la renormalisation du contact seul figure dans le paragraphe VI.2). Pour compléter la démonstration, il nous manque d'avoir analysé les cas :

iv) m particules échangées dans n voies (Y_m).

v) superposition d'une interaction de contact à l'échange de plusieurs particules (Y_m + F).

La démonstration qui suit est valable, que nous soyons dans le cadre du modèle galiléen ou dans celui de Zachariasen ; la renormalisation que nous opérons consistant à éliminer les paramètres infinis, elle est inutile si on travaille dans un modèle de Lee avec "cut-off".

I - LES NOTATIONS.

Nous allons définir les notations qui sont nécessaires pour exprimer le plus simplement possible les démonstrations générales. Nous ne rappellerons pas les définitions du formalisme D/D proprement dit ; on les trouvera au chapitre 0 (ou au chapitre II).

(*) On note -et c'est conventionnel- par F l'interaction de contact (Fermi) et par Y l'échange d'une particule (interaction de Yukawa).

I.1 - Notations fondamentales.

Les notations les plus fondamentales sont celles qui définissent la structure analytique correspondant à un graphe ou à une série de graphes.

1°/ - Les particules externes qui définissent les voies de N (voir chapitre 0) sont notées :

$$(N_i, \theta_i) \qquad \forall\, i \in N \quad , \tag{1a}$$

- Les (éventuelles) particules échangées sont notées

$$V^{(r)} \quad , \quad r \in \{1, 2, 3, \ldots, m\} \equiv M \quad ; \tag{1b}$$

elles ont pour masse nue(*) :

$$\mu_0^{(r)} \quad , \forall\, r \in M. \tag{2a}$$

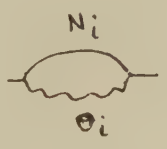
Les constantes de couplage nue et renormalisée de $V^{(r)}$ à la voie (N_i, θ_i), seront respectivement notées :

$$g_i^{(r)} \quad \text{et} \quad \gamma_i^{(r)} \quad , i \in N \, , r \in M. \tag{2b}$$

- Le propagateur nu de $V^{(r)}$ sera noté :

$$\Delta_o^{(r)} = \left[\Delta - \left(\mu_0^{(r)}\right)^2 \right]^{-1} \quad . \tag{2c}$$

2°/ - La boucle de self-énergie correspondant au couple (N_i, θ_i) :



(*) Dans tout cet appendice M désignera l'ensemble des particules (et non un sous-ensemble de N).

sera notée Σ_i .

- On définira plus loin une "matrice constante" infinie A, diagonale, telle que :

$$\Sigma_i - A_i \quad . \tag{3}$$

sera finie pour tout s fini (modèle galiléen) ou non nul (modèle de Zachariasen.

3°/ - La constante de Fermi décrivant une interaction de contact dans la réaction :

$$N_i\ \theta_i \longrightarrow N_j\ \theta_j \quad ,$$

sera notée :

$$\lambda^{\circ}_{ij} \qquad \text{ou} \qquad \lambda_{ij} \quad , \tag{4}$$

suivant qu'on parle de ce couplage comme nu ou comme renormalisé.

I.2 - Notations matricielles.

L'ensemble des voies étant noté N (Card (N) = n) et celui des particules M (Card (M) = m), on définit à partir des grandeurs explicitées au paragraphe (I.1) les matrices suivantes sur N ou sur M :

$$\left.\begin{aligned} \cdot\ (\Delta_0)_{rr'} &= \Delta_0^{(r)}\,\delta_{rr'} \\ \cdot\ (\Delta)_{rr'} &= \Delta^{(r)}\,\delta_{rr'} \end{aligned}\right\} \quad r, r' \in M \,, \tag{5a}$$

$$\left.\begin{aligned} \cdot\ \Sigma_{ij} &= \Sigma_i\,\delta_{ij} \\ A_{ij} &= A_i\,\delta_{ij} \\ (\Sigma - A)_{ij} &= (\Sigma - A)_i\,\delta_{ij} \end{aligned}\right\} \quad i, j \in N \tag{5b}$$

$$\cdot\ (M_0)_{rr'} = \mu_0^{(r)}\,\delta_{rr'} \quad , \quad r, r' \in M \tag{5c}$$

On définit aussi les "matrices" (tenseurs du second rang) dont les éléments sont :

$$g_i^{(r)} \qquad \text{et} \quad \gamma_i^{(r)} \quad ;$$

un indice (i) agit dans N et l'autre (r) dans M, et on note respectivement ces matrices par :

$$g \qquad \text{et} \quad \gamma \tag{5d}$$

les matrices transposées correspondantes sont :

$$\tilde{g} \qquad \text{et} \quad \tilde{\gamma} \tag{5c}$$

qui ont les mêmes éléments de matrice. g et γ agissent dans N comme des vecteurs colonnes ($\tilde{g}$ et $\tilde{\gamma}$, comme des vecteurs lignes) et dans M comme des vecteurs lignes ($\tilde{g}$ et $\tilde{\gamma}$ comme des vecteurs colonnes).

Ces dernières définitions peuvent paraître compliquées (à ce stade), mais on va voir quelles simplifications d'écriture elles peuvent apporter au niveau des équations et des calculs ; tout d'abord cela permet de définir les produits matriciels suivant comme des matrices sur N :

$$g\,\Delta_0\,\tilde{g} \qquad , \quad \gamma\,\Delta_0\,\tilde{\gamma} \qquad , \tag{6a}$$

puisque, par exemple :

$$(g\,\Delta_0\,\tilde{g})_{ij} = \sum_{r,r' \in M} g_i^{(r)} \left[\Delta_0^{(r)}\,\delta_{rr'}\right] g_j^{(r')} = \sum_{r \in M} g_i^{(r)}\,\Delta_0^{(r)}\,g_j^{(r)} \quad .$$

De même, on peut définir les matrices suivantes sur M :

$$\tilde{g}\,\Sigma\,g \qquad , \quad \tilde{\gamma}\,\Sigma\,\gamma \qquad , \tag{6b}$$

d'autres peuvent être construites en remplaçant dans (6b) Σ par A ou $\Sigma - \Lambda$. Les matrices (6a) ou (6b) peuvent être considérées comme des traces sur M et N, respectivement. D'une façon générale, toute matrice R étant définie sur M,

les opérateurs :

$$g R \tilde{g} \qquad \text{et} \qquad \gamma R \tilde{\gamma} \quad , \tag{6c}$$

sont des matrices sur N et, si R' est une matrice sur N :

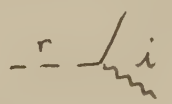
$$\tilde{g} R' g \qquad \text{et} \qquad \tilde{\gamma} R' \gamma \quad , \tag{6d}$$

sont des matrices sur M. Un moyen simple dans la suite de reconnaître si un groupement du type (6c) ou (6d) est une matrice sur M ou N est de regarder sur quoi la matrice intermédiaire est définie : si R est une matrice sur M, le produit apparaîtra comme une matrice sur N, et réciproquement.

II - ECHANGE DE m PARTICULES SANS INTERACTION DE CONTACT.

II.1 - "Renormalisation" de l'amplitude.

Notons graphiquement :



(7a)

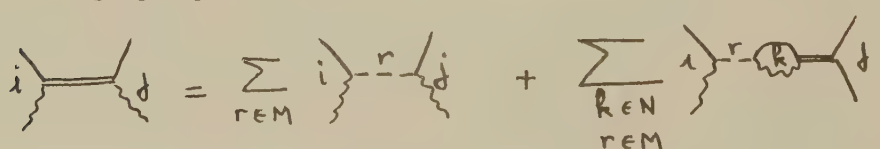
le vertex $V^{(r)} N_i \theta_i$,

(7b)

la boucle $N_k \theta_k$, et par :

(7c)

le propagateur habillé. Avec ces notations, l'élément T_{ij} de l'amplitude correspondant au processus d'échange de m particules est solution de l'équation graphique :



(8a)

dont l'expression algébrique est :

$$T_{ij} = \sum_{r\in M} g_i^{(r)} \Delta_c^{(r)} g_j^{(r)} + \sum_{\substack{k\in N \\ r\in M}} g_i^{(r)} \Delta_o^{(r)} g_k^{(r)} \Sigma_k T_{kj} \quad . \tag{8b}$$

En introduisant les notations matricielles que nous avons définies au paragraphe I, on peut vérifier que (8b) n'est que l'élément (i,j) de l'équation matricielle :

$$T = g \Delta_o \tilde{g} + (g \Delta_o \tilde{g}) \Sigma T \quad ; \tag{9}$$

le terme décrivant l'interaction matricielle nue est écrit conformément à (6a) et (6c). Si nous définissons la matrice sur N :

$$\Lambda_o = g \Delta_o \tilde{g} \quad , \tag{10a}$$

On peut, en itérant (9), obtenir pour T la série matricielle de perturbation :

$$T = \Lambda_o + \Lambda_o \Sigma \Lambda_o + \Lambda_o \Sigma \Lambda_o \Sigma \Lambda_o + \dots \quad , \tag{10b}$$

dont la somme admet plusieurs expressions équivalentes :

$$T = \left[1 - (g \Delta_o \tilde{g}) \Sigma\right]^{-1} (g \Delta_o \tilde{g}) \tag{11a}$$

$$T = g \left[\Delta_o^{-1} - \tilde{g} \Sigma g\right]^{-1} \tilde{g} \quad . \tag{11b}$$

Si, dans (11a), le crochet est une matrice sur l'espace N des voies, (en se reportant à (6b) ou (6d)) on voit que le crochet dans (11b) est une matrice sur l'espace M des particules ; de plus, c'est aussi le propagateur matriciel habillé non renormalisé :

$$\underline{\Delta_o} = \left[\Delta_o^{-1} - \tilde{g} \Sigma g\right]^{-1} \quad . \tag{12}$$

En posant :

$$\Delta_o^{-1} = s I - M_o^2 \quad , \tag{13}$$

où I est la matrice unité dans M et M_0^2 le carré de la matrice diagonale des masses nues, l'expression (12) peut se mettre sous la forme :

$$\underline{\Delta_0} = \left[\Delta I - M_0^2 - \tilde{g} \Sigma g \right]^{-1} \quad . \tag{14}$$

La "renormalisation" que nous opérons consiste à dire que :

$$\underline{\Delta_0}^{-1} (\Delta = \mu^2) = \alpha \tag{15a}$$

(α est une matrice finie, et μ^2 un point choisi suivant un critère qu'il importe peu de préciser). Si on pose :

$$A = \Sigma(\mu^2) \quad , \tag{15b}$$

$$\delta M^2 = \tilde{g} A g \quad , \tag{15c}$$

et(*) :

$$M^2 = \mu^2 I - \alpha = M_0^2 + \delta M^2 \, , \tag{15d}$$

ainsi que :

$$\Delta^{-1} = \Delta I - M^2 \quad , \tag{16}$$

l'expression (14) devient :

$$\underline{\Delta} = \left[\Delta^{-1} - \tilde{g} (\Sigma - A) g \right]^{-1} \, , \tag{17a}$$

(*) M^2 n'est pas la matrice des carrés des masses physiques (elle n'est même pas diagonale), c'est uniquement une matrice finie. Pour obtenir les masses physiques, il faudrait imposer des conditions sur les pôles et résidus de (17a) et (17b). Cela explicite le lien entre notre "renormalisation" et la régularisation classique (voir B. JOUVET, 1955, cité au ch. VII).

qui est le propagateur habillé renormalisé(*) où ne figurent plus de paramètres infinis ; l'amplitude renormalisée qui y correspond est :

$$T = g \underline{\Delta} \tilde{g} \quad , \tag{17b}$$

conformément à (6c) .

Nous avons, dans cette renormalisation, conservé la forme analytique de l'amplitude, comme celle du propagateur habillé ou non (comparer (11b) et (12) à (17b) et (17a)) ; le fait que M_0^2 soit diagonale alors que M^2 ne l'est pas, n'a bien sûr aucune importance .

II.2 - "Renormalisation" de la fonction D.

Les expressions nues (D_{nue}) et renormalisée (D_{Ren}) de la fonction D décrivant l'échange de m particules sont, respectivement, les déterminants de $\underline{\Delta_0^{-1}}$ (rel. (12)) et $\underline{\Delta}^{-1}$ (rel.(14)) :

$$\begin{cases} D_{nue} = \det \left[\Delta_0^{-1} - \tilde{g} \Sigma g \right] \\ D_{Ren} = \det \left[\Delta^{-1} - \tilde{g} (\Sigma - A) g \right] \end{cases} \tag{18}$$

La matrice-constante de renormalisation "de masse" étant définie par (15c) :

$$g M^2 = \tilde{g} A g \quad ,$$

il est facile de trouver que :

$$D_{nue} = D_{Ren} \quad , \tag{19}$$

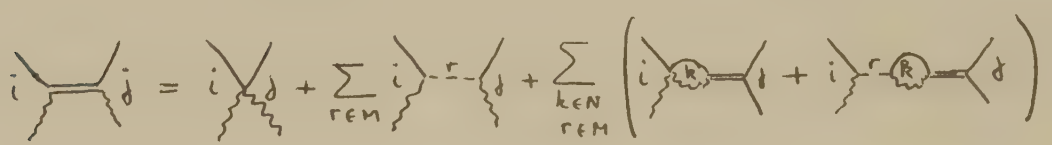
comme pour le cas de l'échange d'une seule particule (voir ch. VII , § IV). On voit sur les relations (18) que la forme analytique de D se conserve dans la renormalisation. La règle habituelle du développement des déterminants conduit alors à la conservation des lois de degré .

(*) $\underline{\Delta}$ n'est que la forme renormalisée de $\underline{\Delta_0}$, on passe de l'une à l'autre en introduisant dans (14) ou (17a) les notations (15).

III - ECHANGE DE m PARTICULES AVEC INTERACTION DE CONTACT.

On symbolisera graphiquement l'interaction de contact entre les voies i et j par :

L'équation (8a) lorsque s'ajoute une interaction de contact est donnée par :



, (20a)

dont l'expression algébrique est :

$$T_{ij} = \left(\lambda^{\circ}_{ij} + \sum_{r\in M} g^{(r)}_i g^{(r)}_j \Delta^{(r)}_o\right) + \sum_{\substack{k\in N \\ r\in M}} \left(\lambda^{\circ}_{ik} + g^{(r)}_i g^{(r)}_k \Delta^{(r)}_o\right) \Sigma_k T_{kj} \quad . \tag{20b}$$

L'équation (20b) n'est jamais que l'élément (i,j) de l'équation matricielle :

$$T = \lambda^{\circ} + g\Delta_o\tilde{g} + (\lambda^{\circ} + g\Delta_o\tilde{g})\Sigma T \quad , \tag{21a}$$

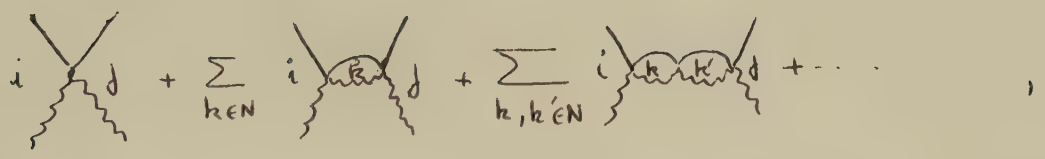
dont la solution est :

$$T = \left[1 - (\lambda^{\circ} + g\Delta_o\tilde{g})\Sigma\right]^{-1}(\lambda^{\circ} + g\Delta_o\tilde{g}) \quad , \tag{21b}$$

exprimée en termes des grandeurs nues. Pour renormaliser l'amplitude, nous allons utiliser une décomposition du type de BW Lee et al (cité au chapitre VII) dans le cas de n voies. Tous les opérateurs classiques du cas d'une seule voie apparaissent, mais, à présent, ce sont des matrices.

III.1 - La partie irréductible T_1 de T.

Elle correspond, classiquement, à la somme de la série :



qui est aussi solution de l'équation itérative rencontrée au chapitre VIII :

$$T_1 = \lambda^\circ + \lambda^\circ \Sigma T_1 \quad , \tag{22a}$$

et dont l'expression est :

$$T_1 = (1 - \lambda^\circ \Sigma)^{-1} \lambda_\circ \tag{22b}$$

On choisit un point $s = \mu^2$ pour renormaliser, et on pose :

$$A = \Sigma(\mu^2) \quad ; \tag{22c}$$

on contraint $T_1(\mu^2)$ à être égal à une matrice constante λ :

$$T_1(\mu^2) = \lambda = (1 - \lambda_\circ A)^{-1} \lambda_\circ \quad . \tag{23}$$

On définit la matrice-constante de renormalisation de vertex[(*)] Z_1 :

$$Z_1 = (1 + \lambda A)^{-1} = 1 - \lambda_\circ A \quad , \tag{24a}$$

qui conduit à :

$$\lambda_\circ = Z_1 \lambda \quad . \tag{24b}$$

En portant les relations (24) dans (22b), on trouve :

$$T_1 = \left[1 - \lambda(\Sigma - A)\right]^{-1} \lambda \, . \tag{25}$$

qui a la même forme analytique que (22b) et où il n'y a plus de paramètres infinis : dans la renormalisation, T_1 conserve sa forme analytique.

(*) On va voir, un peu plus bas, que cette définition de Z_1 est bien correcte.

III.2 - Le vertex matriciel habillé.

La série de perturbation définissant le vertex habillé non renormalisé Γ_0 est :

(26a)

dont l'expression analytique est :

$$(\Gamma_0)_{ih} = \delta_{ih} + \lambda^0_{ih}\Sigma_k + \sum_{k' \in N} \lambda_{ik'}\Sigma_{k'}\lambda_{k'k}\Sigma_k + \cdots \quad , \tag{26b}$$

soit, matriciellement :

$$\Gamma_0 = \mathbb{1} + \lambda_0\Sigma + (\lambda_0\Sigma)^2 + \cdots \quad , \tag{27a}$$

dont la somme est :

$$\Gamma_0 = (1 - \lambda^0\Sigma)^{-1} \quad . \tag{27b}$$

On définit le vertex habillé renormalisé par :

$$\Gamma = \Gamma_0 Z_1 \quad ; \tag{28}$$

Z_1 étant donné par (23a), si on porte cette expression et (26b) dans (27), on trouve :

$$\Gamma = \left[1 - \lambda(\Sigma - A)\right]^{-1} \quad . \tag{29}$$

En comparant (27b) et (29), il est facile de voir que le vertex habillé garde la même forme analytique dans la renormalisation en Z_1 (*).

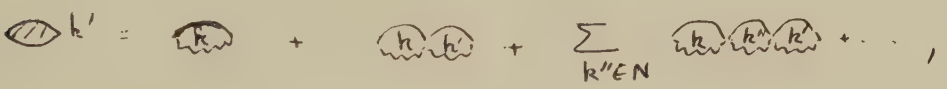
(*) On remarquera que la matrice-constante de renormalisation de vertex Z_1 n'est pas symétrique.

III.3 - La boucle matricielle habillée.

La boucle matricielle habillée π, dont l'élément (k, k') est représenté graphiquement par :

k ⟨⟩ k' = $\Pi_{kk'}$,

est définie par la série :



soit :

$$\Pi = \Sigma + \Sigma \lambda^{\circ} \Sigma + \Sigma \lambda^{\circ} \Sigma \lambda^{\circ} \Sigma + \cdots ,$$

dont la somme est :

$$\Pi(\Sigma) = \Sigma (1 - \lambda^{\circ} \Sigma)^{-1} = (1 - \Sigma \lambda^{\circ})^{-1} \Sigma \quad . \tag{30}$$

La matrice A étant définie par (22.c), on pose :

$$\Pi_{\infty} = \Pi(A) = A (1 - \lambda_0 A)^{-1} = A (1 + \lambda A) = A Z_1^{-1} , \tag{31}$$

et :

$$\Pi(\Sigma - A) = (\Sigma - A) \left[1 - \lambda (\Sigma - A) \right]^{-1} , \tag{32a}$$

qui ne contient aucun paramètre infini.

Comme on suppose la T-invariance, on a :

$$\lambda = \tilde{\lambda} \qquad \text{et} \qquad \lambda_0 = \tilde{\lambda}_0 ,$$

et on peut alors vérifier que :

$$\Pi(\Sigma) - \Pi(A) = \tilde{Z}_1^{-1} \, \pi(\Sigma - A) \, Z_1^{-1} . \tag{32b}$$

La quantité (32b) correspond à la boucle habillée renormalisée habituelle.

III.4 - Le propagateur habillé $\underline{\Delta_0}$

Avec les notations du § I, le propagateur habillé est donné par la série matricielle :

$$\underline{\Delta_0} = \Delta_0 + \Delta_0 \tilde{g} \Pi(\Sigma) g \Delta_0 + \cdots\cdots$$

dont la somme est :

$$\underline{\Delta_0} = \Delta_0 \left(1 - \tilde{g} \Pi(\Sigma) g \Delta_0\right)^{-1} = \left[\Delta_0^{-1} - \tilde{g} \Pi(\Sigma) g\right]^{-1} . \qquad (33)$$

Définissons les matrices des constantes de couplage renormalisées de vertex :

$$\gamma = Z_1^{-1} g \qquad \text{et} \quad \tilde{\gamma} = \tilde{g} \tilde{Z}_1^{-1} , \qquad (34)$$

et portons les dans (33), compte tenu de (13), pour obtenir :

$$\underline{\Delta_0} = \left[\Delta I - M_0^2 - \tilde{\gamma} \tilde{Z}_1 \Pi(\Sigma) Z_1 \gamma\right]^{-1} . \qquad (35)$$

La "renormalisation" que nous opérons, consiste à dire que :

$$\underline{\Delta_0}^{-1}(\mu^2) = \alpha ,$$

où α est une matrice finie.

Posons :

$$\begin{cases} \delta M^2 = \tilde{g} \Pi_\infty g \\ M^2 = M_0^2 + \delta M^2 = \mu^2 I - \alpha \\ \Delta^{-1} = sI - M^2 \end{cases} , \qquad (36)$$

où A est défini par (22c). En portant (36) dans (35) compte tenu de (32), on obtient l'expression "renormalisée" du propagateur habillé :

$$\underline{\Delta} = \left[\Delta^{-1} - \tilde{\gamma} \Pi(\Sigma - A) \gamma\right]^{-1} \qquad (37)$$

d'où est absent tout "paramètre" infini.

III.5 - Expression de la partie réductible T_2 de T.

L'expression de T_2 en termes des grandeurs nues est :

$$T_2 = \Gamma_0 \, g \, \underline{\Delta_0} \, \tilde{g} \, \tilde{\Gamma}_0 \quad . \tag{38}$$

T_1 étant donné par (22b) et T par (21), on peut vérifier que :

$$T = T_1 + T_2 \quad . \tag{39}$$

En introduisant les expressions renormalisées du vertex (rel. (28)), de la constante de couplage (rel. (34)) et du propagateur habillé (rel. (37)), on trouve que T_2 a l'expression suivante :

$$T_2 = \Gamma \Upsilon \left[\Delta^{-1} - \tilde{\gamma} \, \pi (\Sigma - A) \gamma \right]^{-1} \tilde{\Upsilon} \tilde{\Gamma} \quad , \tag{40}$$

qui a visiblement la même forme analytique que (38).

III.6 - EXPRESSION DE LA MATRICE T.

En ajoutant à (40) la partie irréductible T_1 de l'amplitude (rel. (25)) exprimée en termes des grandeurs "renormalisées", il est facile de trouver que :

$$T = \left[1 - (\lambda_0 + \gamma \Delta \tilde{\gamma})(\Sigma - A) \right]^{-1} (\lambda + \gamma \Delta \tilde{\gamma}) \tag{41}$$

qui a la même forme analytique que (20). Par suite, dans le cas étudié, la structure de T se conserve dans la "renormalisation" qui se résume aux échanges.

$$\begin{cases} \Sigma \rightarrow \Sigma - A \\ M_0^2 \rightarrow M^2 \\ (\lambda_0, g) \rightarrow (\lambda, \gamma) \end{cases}$$

où M^2 est une matrice finie non nécessairement diagonale.

III.7 - Renormalisation de D.

Les expressions (21b) et (41) de la matrice T conduisent immédiatement aux relations suivantes qui définissent D, en termes des grandeurs nues (D_{nue}) ou renormalisées (D_{Ren}) :

$$\begin{cases} D_{nue} = Det\left[1 - (\lambda^\circ + g\,\Delta_o\,\tilde{g})\,\Sigma\right] \\ D_{Ren} = Det\left[1 - (\lambda + \gamma\,\Delta\,\tilde{\gamma})(\Sigma - A)\right] \end{cases} , \qquad (42)$$

à une fonction uniforme de s près.

Comme nous l'avons déjà fait implicitement, (rel. (18) du § II.2, rel. (42) ci-dessus), on notera det A le déterminant de A, si A est une matrice dans l'espace des particules, et Det A si c'est une matrice dans l'espace des voies. Le problème qui va nous préoccupper, à présent, est la relation entre les deux fonctions (42). Au cours du paragraphe III nous avons trouvé les expressions suivantes pour les matrices-constantes de renormalisation :

$$\begin{cases} Z_1 = (1+\lambda A)^{-1} = (1-\lambda^\circ A) \\ \delta M^2 = \tilde{g}\,\Pi_\infty\,g = \tilde{\gamma}\,\tilde{Z}_1 A\,\gamma \end{cases} , \qquad (43a)$$

ainsi que les relations suivantes :

$$\begin{cases} \Delta_o^{-1} = \Delta^{-1} + \delta M^2 \\ \lambda_o = Z_1\,\lambda \quad , \quad g = Z_1\,\gamma \end{cases} \qquad (43b)$$

1°/ - En introduisant dans l'expression (42) de D_{nue} les grandeurs renormalisées, on trouve d'abord :

$$D_{nue} = Det\,Z_1\; Det\left[1 - \lambda(\Sigma - A) - \gamma\,(1+\Delta\delta M^2)^{-1}\,\Delta\,\tilde{\gamma}\,\tilde{Z}_1\,\Sigma\right] \qquad (44a)$$

qui conduit après quelques calculs à :

$$D_{nue} = D_{Ren}\;.\;Det\,Z_1\;.\;\beta \qquad (44b)$$

où :

$$\beta = Det\left[1 - \gamma\left[(1+\Delta\delta M^2)^{-1}\,\Delta\right]\tilde{\gamma}\,\tilde{Z}_1 A\right] \;. \qquad (44c)$$

En utilisant la relation bien connue :

$$Det\,R = \exp\left[Tr\,Log\,R\right] \;, \qquad (44d)$$

et en l'appliquant à la matrice :

$$1 - \gamma \{ (1 + \Delta \delta \mu^2)^{-1} \Delta \} \tilde{\gamma} \tilde{Z}_1 A$$

on peut montrer que (44c) s'écrit :

$$\beta = \det (1 + \Delta \delta \mu^2)^{-1} , \qquad (45)$$

soit, avec (43b) :

$$\beta = \det (\Delta_0 \Delta^{-1}) , \qquad (46)$$

En introduisant cette expression dans (44b), on trouve :

$$(\det \Delta_0)^{-1} D_{nue} = Det Z_1 \ (\det \Delta)^{-1} D_{Ren} . \qquad (47)$$

Si on définit :

$$\mathfrak{D}_{nue} = (\det \Delta_0)^{-1} D_{nue} , \ \mathfrak{D}_{Ren} = (\det \Delta)^{-1} D_{Ren} , \qquad (48)$$

la relation (47) s'écrit :

$$\mathfrak{D}_{nue} = Det Z_1 \ \mathfrak{D}_{Ren} , \qquad (49)$$

qui montre que la renormalisation de vertex se place en facteur et disparaît dans l'amplitude lorsqu'on fait le quotient D/D.

2°/ - On peut démontrer sans trop de difficultés que les fonctions (48) sont non-paradoxales au sens de Federbush (elles ne contiennent ni "faux pôles", ni "faux zéros"). La démonstration étant la même pour les deux fonctions, nous n'allons l'indiquer que pour $\mathfrak{D}_{nue}$. Ecrivons (42) sous la forme :

$$D_{nue} = (-1)^n \ Det (\lambda^0 \Sigma - [1 - (\gamma \Delta_0 \tilde{\gamma}) \Sigma]) , \qquad (50)$$

et rappelons que :

$$\Delta_N(A+B) = \sum_{P \in \mathcal{P}(N)} \Delta_{N-P}(A)\, \Delta_P(B) . \qquad (51)$$

Si nous appliquons cette formule de développement au déterminant (50), il est facile de voir que ce sont les sous-déterminants diagonaux de la matrice :

$$B = 1 - (g \Delta_0 \tilde{g}) \Sigma \quad , \qquad (52)$$

qui, seuls, peuvent introduire les "faux pôles" ou "faux zéros".

Prenons un sous-déterminant diagonal de B :

$$\Delta_P(B) = \mathrm{Det}_P \left[1 - (g \Delta_0 \tilde{g}) \Sigma \right] ,$$

puisque Σ est diagonale, on a(*) :

$$\Delta_P(B) = \mathrm{Det} \left[1_P - (g \Delta_0 \tilde{g})_P \Sigma_P \right] . \qquad (53)$$

En utilisant (44d), on trouve que :

$$\Delta_P(B) = \det \left[1 - \Delta_0 C^{(P)} \right] \qquad (54)$$

où :

$$C^{(P)}_{rr'} = \sum_{i,j \in P} g^{(r)}_i g^{(r')}_j \Sigma_i \delta_{ij} = \sum_{i \in P} g^{(r)}_i g^{(r')}_i \Sigma_i \quad ,$$

(M est l'ensemble des particules). Il est alors facile de voir que :

$$(\det \Delta_0)^{-1} \quad \Delta_P(B)$$

n'a pas de faux pôles ni de faux zéros, ce qui démontre que :

$$\mathcal{D}_{nue} = (\det \Delta_0)^{-1} D_{nue} ,$$

est non paradoxale. Comme la fonction multiplicative est uniforme, cela démontre aussi que les lois de degré se conservent dans la "renormalisation".

(*) Dans les matrices R de (53) l'indice P signifie qu'on prend la sous-matrice diagonale de R dont les indices sont dans P (voir ch. 0).